



**В.В. Чамеев
В.В. Побединский
А.В. Солдатов**

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ЛЕСОПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА
С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

Серия
**Основы проектирования
лесопрмышленных производств.
Системный подход**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный
лесотехнический университет»

**В.В. Чамеев
В.В. Побединский
А.В. Солдатов**

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ЛЕСОПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА
С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

Серия
**Основы проектирования
лесопрмышленных производств.
Системный подход**

Екатеринбург
2018

УДК 37.132.01я73
ББК 630.3.001.57(075.8)
Ч17

Рецензенты:

кафедра Лесного хозяйства, деревообработки и прикладной механики
ФГБОУ ВО «Государственный аграрный университет Северного Зауралья»;
зам. директора по науке ООО «УралНИИЛП», канд. техн. наук
А.В. Голенищев

Чамеев, В.В.

Ч17 Аналитические методы исследования технологических процессов лесопромышленного производства с применением теории массового обслуживания: учеб. пособие / В.В. Чамеев, В.В. Побединский, А.В. Солдатов. – Екатеринбург: Урал. гос. лесотехн. ун-т, 2018. – 120 с.

ISBN 978-5-94984-655-1

В пособии изложены материалы для изучения специальных дисциплин обучающимися лесотехнических специальностей. Приведены основы общей теории систем и освещены вопросы ее приложения к исследованиям и проектированию технологических процессов лесопромышленных производств. Особое внимание уделяется аналитическим методам, в частности теории массового обслуживания. Для практического применения теоретических знаний рассмотрены типичные примеры проектирования реальных объектов.

Пособие предназначено для обучающихся направления 35.03.02 «Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств», магистрантов профилей подготовки 35.04.02 «Лесоинженерное дело», 23.04.03 «Сервис транспортных и транспортно-технологических машин автодорожно-строительного и лесного комплексов». Материалы пособия могут быть использованы и в других направлениях и учебных дисциплинах лесного профиля.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Уральского государственного лесотехнического университета.

УДК 37.132.01я73
ББК 630.3.001.57(075.8)

ISBN 978-5-94984-655-1

© ФГБОУ ВО «Уральский государственный
лесотехнический университет», 2018
© В.В. Чамеев, 2018
© В.В. Побединский, 2018
© А.В. Солдатов, 2018

ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) по направлению подготовки 35.03.02 «Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств» представлены дисциплины по выбору. Одной из таких дисциплин является Б.1.Б.26 «Проектирование лесозаготовительных и деревообрабатывающих производств», которая тесно связана с дисциплиной Б.1.Б.11 «Моделирование и оптимизация процессов». Для освоения учебного материала по этим дисциплинам в настоящем учебном пособии на примере использования аналитических методов исследования сложных систем в лесопромышленном производстве обобщены некоторые научные исследования и разработки в области проектирования лесопромышленных производств в лесной отрасли, выполненные научно-исследовательскими институтами, проектными организациями, вузами лесотехнического профиля.

Приведенные в учебном пособии материалы способствуют углубленному пониманию процессов функционирования предприятий и позволят магистрантам и специалистам отрасли широко применять методы исследования для решения различных производственных задач.

ВВЕДЕНИЕ

Леса России составляют четверть мировых запасов древесной биомассы. Общий запас леса – 80,7 млрд кубометров. На долю спелых и перестойных лесов приходится 44,1 млрд кубометров, из них 35,3 млрд – леса хвойных пород. Доля продукции Российского ЛПХ не превышает 3 % мирового объема, при этом использование расчетной лесосеки не достигает 30 %.

По запасам древесины Свердловская область занимает 16 место в России. Доля лесопромышленного комплекса Свердловской области в России составляет по вывозке лесоматериалов 3,3 % (2 место), по производству пиломатериалов – 4,7 % (6 место), фанеры – 7,8 % (3 место), ДВП – 3,2 % (13 место), ДСП – 2,4 % (15 место).

В обрабатывающем производстве насчитывается около 500 предприятий. Предприятия лесного комплекса работают почти в каждом муниципальном образовании Свердловской области. В целом ряде населенных пунктов они являются социально значимыми и градообразующими. От работы этих предприятий зависит решение экономических, экологических, социальных проблем территорий небольших и удаленных населенных пунктов.

Низкая доля лесной продукции ЛПК на мировом уровне и на уровне РФ обусловлена следующими факторами:

- низким уровнем освоения расчетной лесосеки;
- устаревшими технологиями лесопереработки;
- разрывом между предприятиями по переработке лесных ресурсов и сырьевой базой;
- отсутствием высокотехнологического оборудования;
- высоким уровнем износа основных фондов;
- низкой степенью переработки сырья;
- высокой энергоёмкостью производства [1, 2, 3].

Вывод лесопромышленного комплекса на более высокий инженерный уровень возможен за счет реконструкции существующих лесопромышленных предприятий, строительства новых, что подразумевает обязательное проведение исследовательских и проектных работ.

Одной из характерных черт современного проектирования и управления является представление исследуемых и проектируемых

объектов как систем. Любая исследовательская или проектная деятельность связана с построением моделей. Описание систем представляется в виде множества различных моделей, в каждой из которых получает выражение какой-то аспект системы. На современном этапе развития системных исследований используются компьютерные технологии моделирования [4]. Однако следует иметь в виду, что результаты компьютерного проектирования предприятий, не основанные на адекватном системном подходе, приводят к серьезным ошибкам и, как правило, к большим затратам на разработку и внедрение систем автоматизации проектирования и управления.

Предлагаемое учебное пособие посвящено применению общей теории систем и аналитических методов исследования и проектирования лесотехнических объектов. Значительное место в технологических расчётах среди аналитических методов занимает теория массового обслуживания. В этой связи даны понятия об общей теории систем и приведены основные методы исследования систем с использованием аналитических методов. Для получения практических навыков изложены конкретные примеры расчётов операционных запасов лесоперерабатывающих потоков с применением аппарата систем массового обслуживания. Исходные данные для расчетов даны в прил. 1–12.

Сокращения и обозначения в тексте

- ЛП – лесопромышленное предприятие;
- ЛХП – лесохозяйственное предприятие;
- ПЛ – потребитель леса;
- СУР – создание условий работы;
- СПТ – создание предмета труда;
- СО – система качеств, характеризующих подготовку оператора;
- СТ – система технологических параметров;
- СМ – система, характеризующая параметры машин;
- СУР – система свойств, характеризующих условия работы;
- СПТ – система свойств предмета труда;
- СП – система свойств готовой продукции;
- ОТС – общая теория систем;
- ТМО – теория массового обслуживания;
- СОЗ – случайный отбор заявок;
- МО – модели массового обслуживания;
- λ_1 – интенсивность отказов, 1/мин;
- μ_1 – интенсивность восстановлений, 1/мин;

Mt_0 – среднее время безотказной работы, мин;
 Mt_B – среднее время восстановления, мин;
 ρ_l – показатель загрузки системы отказами;
 $T_{\text{ч}}$ – чистое время работы, мин;
 $T_{\text{ОБЩ}}$ – общее время, мин;
 T_B – время восстановления, мин;
 $\Sigma t_{\text{ОРГ}}$ – сумма простоев по организационным причинам, мин;
 $\Sigma t_{\text{ТЕХ}}$ – сумма простоев по технологическим причинам,
 включая подготовительно-заключительное время, мин;
 T – время восстановления с вероятностью 0,9 мин;
 λ_K – критерий согласия Колмогорова.

**ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ
ИССЛЕДОВАНИЯ
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

В последнее время при исследовании, проектировании и управлении лесопромышленными предприятиями специалистам все чаще приходится сталкиваться с рядом принципиально новых системных проблем. Этим системам присущ целый ряд специфических качеств и свойств, связанных с вероятностной природой их параметров. Лесопромышленные предприятия образуют особый класс сложных систем, к которым применимы все принципы и методы современной теории систем.

Характеристики деревьев, хлыстов, сортиментов, параметры готовой продукции в высшей степени подвержены влиянию природно-климатических и производственных условий и носят вероятностный характер [5–7].

Постоянное усложнение технологических процессов, появление локальных центров управления компьютерной микропроцессорной техникой многих видов оборудования привели к существенному усложнению структуры производств и технологических процессов. Это, в свою очередь, вызвало возрастание роли системных проблем, возникающих при решении задач анализа и синтеза, на различных стадиях жизненного цикла лесопромышленных предприятий.

Совершенно очевидно, что овладение научным подходом для решения производственных проблем на основе общей теории систем является необходимым этапом подготовки современного инженера, магистра.

1.1. Лесопромышленное предприятие как сложная система

Производство – это сложная организованная система, посредством которой участвующие в ней люди, руководствуясь единством цели, используя ресурсы природы и свой труд, создают для общества новую продукцию.

Производственный процесс – это функционирование (работа) производства во времени. Ритмичная работа производства обеспечивается его управлением.

Управление – воздействие управляющих органов на соответствующие параметры деятельности людей и процессы для достижения определенного эффекта.

«Система» в переводе с греческого означает «соединение» или «составленное из частей» [8]. Краткое понятие «система» может быть определено как упорядоченная совокупность различных взаимосвязанных и взаимодействующих элементов. Отдельные элементы системы объединены между собой причинно-следственными связями. Это означает, что изменение даже одного элемента или одной связи между элементами влечет за собой изменение других элементов и связей. Теснота или степень связности элементов между собой и другими элементами (внешними элементами, элементами внешней среды) является критерием выделения этой совокупности в систему.

Объединение элементов в систему или, наоборот, разделение системы на элементы относительно и зависит от задач исследования. Так, лесопромышленное предприятие можно представить и как сложную систему, и как элемент системы более глобальной системы «Лесная отрасль России», или как подсистему «Лесопромышленное объединение» (концерн, холдинг и т.д.). Аналогичным образом в виде сложной системы можно рассматривать отдельные структурные единицы лесопромышленного предприятия: лесосечные, лесоскладские работы и лесообрабатывающие цехи, поточные линии, отдельные машины, станки и механизмы.

При рассмотрении лесопромышленного предприятия как системы можно выделить ее отдельные элементы (рис. 1.1): лесосечные участки, участки и цехи нижнего лесопромышленного склада, транспортный цех, вспомогательные службы и т.п.

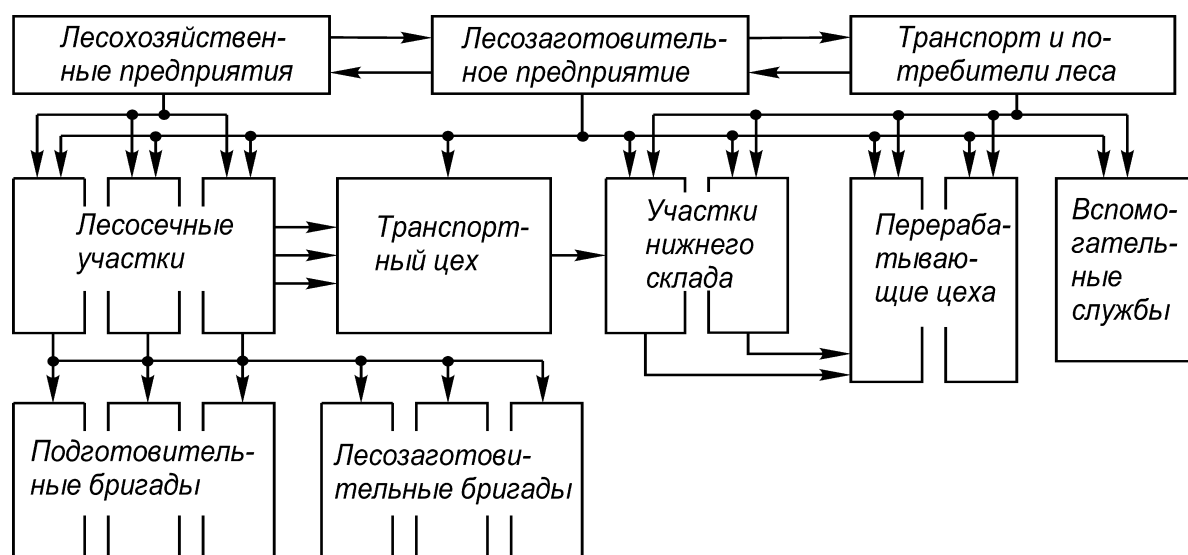


Рис. 1.1. Многоуровневая структура системы «Лесопромышленное предприятие» [8]

Число этих элементов, их качественные характеристики и взаимосвязь составляют определенную целостность, предназначенную для выполнения плана. Взаимосвязь транспортного цеха с лесосечными участками осуществляется через такие параметры, как суточное задание участков, расстояние от лесосек до нижнего лесного склада, коэффициент сменности и т.п. Аналогичная взаимозависимость имеется между другими элементами системы. Во всех случаях основу взаимосвязи между элементами системы составляют потоки лесоматериалов (деревья, хлысты, сортименты, заготовки, готовая продукция лесобрабатывающих цехов).

Сложные системы характеризуются рядом признаков:

- множеством взаимосвязанных и взаимодействующих между собой элементов;
- сложностью функции, выполняемой системой и направленной на достижение заданной цели функционирования;
- возможностью разбиения системы на подсистемы, цели функционирования которых подчинены общей цели функционирования всей системы;
- наличием управления, разветвленной информационной сети и интенсивных потоков информации;
- взаимодействием с внешней средой и функционированием в условиях воздействия случайных факторов.

Каждый элемент системы «Лесопромышленное предприятие» (ЛП) представляет собой подсистему более низкого уровня, также состоящую из элементов. Например, лесосечные участки включают в себя такие элементы более низкого уровня, как подготовительные бригады, лесозаготовительные бригады и т.д., находящиеся, в свою очередь, во взаимосвязи. Так, качество выполнения подготовительных работ оказывает влияние на эффективность работы лесосечных бригад. Своевременная информация с лесосечных участков о размерно-качественных параметрах сырья и объеме заготовленного леса, состоянии техники и лесовозных усов, наличии или отсутствии горюче-смазочных материалов и т.п. позволяет регулировать вывозку леса, организовывать ремонт техники и доставку горючего, ремонт лесовозной дороги, то есть управлять отдельными элементами и системой в целом.

Система ЛП имеет ярко выраженное взаимодействие с системами более высокого уровня (лесозаготовительная отрасль, лесозаготовительное объединение) и системами равного уровня (лесохозяйственные предприятия, транспорт готовой продукции, потребители

леса). На функционирование системы ЛП воздействует ряд случайных факторов, таких как погодные условия, случайное распределение деревьев и хлыстов на лесосеке по размерам, породам, распределение предмета труда на всех фазах лесопромышленного производства по качественным параметрам, показатели надёжности машин, станков и механизмов и т.п.

Расчленение на более мелкие элементы обусловливается тем, что сложную систему как объект исследования практически невозможно изучить, поэтому приходится расчленять объект на конечное число элементов (подсистем), учитывая связи между частями, характеризующие их взаимодействие. «Связи – это то, что соединяет объекты (подсистемы) и свойства в системном процессе в целое». Каждый элемент или подсистема характеризуется определенными свойствами. Свойства дают возможность описывать объекты системы количественно, выражая их в единицах, имеющих определенную размерность.

Свойствами системы «Лесохозяйственное предприятие» (ЛХП) являются состав категорий леса, способ рубок, породный состав древостоя, размеры и концентрация лесосек, способ лесовосстановления и т.п. Свойствами системы ЛП являются размер, форма и расположение лесосырьевой базы относительно общегосударственных путей транспорта, годовой объём производства лесоматериалов, тип нижнего склада (сухопутный, сухопутно-водный), сортиментный план и т.п. Свойствами системы «Потребитель леса» (ПЛ) являются удаленность от лесозаготовительных предприятий, объём и состав перерабатываемого сырья, вид транспорта и т.п.

Свойства системы ЛХП непосредственно влияют на функционирование системы ЛП и, в особенности, на проведение лесосечных работ. Последние оказывают влияние на процесс лесовосстановления. В то же время качество сырья (продукция системы ЛП) влияет на функционирование системы ПЛ.

Таким образом последовательно устанавливаются связи между системами и подсистемами. Основу связей элементов в сложных системах составляют потоки лесоматериалов, которые при прохождении через сложную систему «Лесопромышленное предприятие» постепенно превращаются из потоков сырья (деревья и хлысты) в потоки готовой продукции (сортименты, пиломатериалы, заготовки и т.д.).

На основании этих связей составляются математические модели, в том числе сырья, полуфабрикатов, готовой продукции, и решаются задачи оптимизации функционирования сложных систем [8, 9].

Аналогичным образом можно представить в виде сложных систем нижний лесопромышленный склад (рис. 1.2), лесообработывающие цехи.

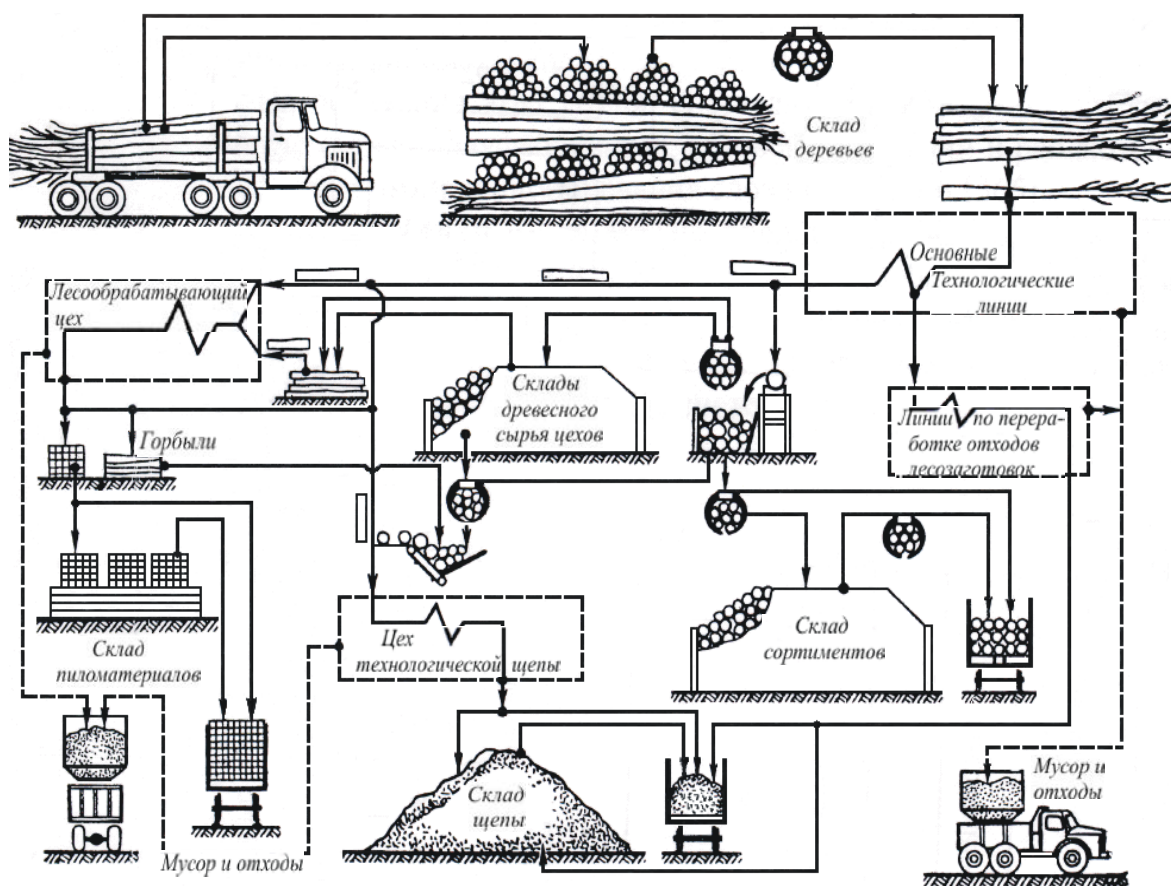


Рис. 1.2. Структурная схема нижнего лесного склада [9]

Представление лесопромышленного производства в виде сложной системы позволяет решать задачи по исследованию, проектированию и управлению, в частности создание систем АСУП и АСУ ТП.

1.2. Взаимодействие природных факторов с лесопромышленным производством

Лесопромышленные предприятия относятся к добывающим предприятиям и имеют непосредственную связь с природой [8, 10]. С позиций системного подхода связь лесопромышленного предприятия с природой и обществом можно представить в виде, изображённом на рис. 1.3.

Природа в течение продолжительного времени (прямые пунктирные линии) создаёт условия работы (СУР) и предмет труда (СПТ).

Обществу требуется продукция (СП) в виде лесоматериалов. Изучив условия работы и предмет труда, оно продолжительное время разрабатывает технологию и организацию производства (СТ), создаёт орудия труда: машины и их системы (СМ), и обучает рабочую силу: операторов, станочников (СО) (непосредственное взаимодействие систем в процессе производства отмечено сплошными линиями). Оператор, зная технологию, с помощью машин воздействует на предмет труда для получения продукции. Информация об условиях работы и предмете труда – обратная связь (сплошные волнистые линии) – поступает через органы чувств к оператору, который в целях безаварийной работы и максимальной производительности может изменять приёмы труда.

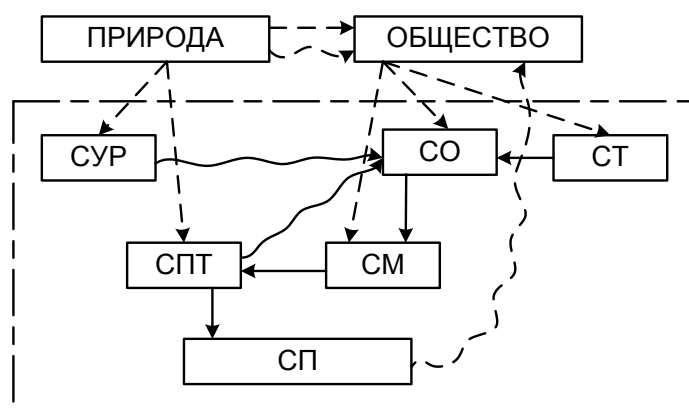


Рис 1.3. Система взаимодействия лесопромышленного предприятия с природой и обществом [8]: СО – система качеств, характеризующих подготовку оператора; СТ – система технологических параметров; СМ – система, характеризующая параметры машин; СУР – система свойств, характеризующих условия работы; СПТ – система свойств предмета труда; СП – система свойств готовой продукции

Воспроизводство предмета труда СПТ осуществляется естественным или искусственным лесовыращиванием. В последнем случае СМ возделывают почву, осуществляют посев или посадку леса, воздействуя таким образом на природу. Результатом совместной деятельности природы и общества (СП) будет выращенный лес, являющийся одновременно предметом труда другой системы. Поступающая в общество информация (волнистая пунктирная линия) является основанием для дополнительного воздействия СМ на природу, например, при проведении рубок ухода за лесом.

Критерием функционирования описанной системы является максимальное количество качественной продукции, получаемой

с минимальными затратами для общества и минимальными потерями для природы.

Информация о результатах производства (волнистая пунктирная линия) поступает в общество. Изучив её, общество принимает меры для повышения производительности труда, качества продукции, улучшения условий работы машин и операторов, сохранения или восстановления природной среды. Для этого оно совершенствует или создаёт вновь на более высоком уровне технологию и машины, улучшает методы подготовки оператора. Таким образом, процесс повторяется по диалектической спирали.

Существуют и другие формализации, описывающие воздействие природных факторов с производством. Так, при проектировании систем применяются понятия техносферы и биосферы [10].

Техносфера – совокупность всевозможных технических средств, воздействующих на человека в его социальной и биологической сферах. Техносфера вместе с социальной и биологической сферами образует *экосферу* человека с соответствующими условиями жизни и развития. Поскольку все элементы экосферы не могут подвергаться безграничным и мгновенным изменениям, то при оценке развития отрасли, предприятия, системы машин и так далее необходимо учитывать по возможности все ограничения социально-экономического и технического характера, которые и будут определять стратегию технической политики.

К ограничениям биосферы относятся запасы сырья и топливно-энергетических ресурсов, требования охраны окружающей среды, ресурсы рабочей силы, требование сокращения тяжёлых и ручных работ.

Техносфера, частью которой являются лесопромышленные предприятия, достаточно жёстко нормирует объёмы и качества ресурсов, необходимых для поддержания и обновления производственных процессов, обеспечения их транспортной инфраструктурой. Техносфера воздействует на лесопромышленное производство и за счёт технического уровня прогрессивного оборудования, инструмента, технических средств автоматизации, вновь внедряемых и осваиваемых на предприятиях.

Лесопромышленное производство и само способно задавать ограничения техносфере, управляя номенклатурой и качеством своей продукции, созданием новых её видов. Наличие и значимость этой связи до сих пор недостаточно оценивается на всех уровнях планирования и управления. Нельзя не учитывать и то, что и другие отрасли

промышленного производства, сами будучи частью техносферы, тоже влияют на развитие лесопромышленного производства.

Таким образом, при исследовании, проектировании ЛП необходим системный подход, учитывающий все сложно-организованные связи и иерархическую структуру.

1.3. Методы исследования сложных систем

Методы исследования сложных систем можно разделить на *фундаментальное* направление и *прикладное*, но в обоих случаях объект исследования представляется в виде сложной системы.

В фундаментальных исследованиях разрабатывается общая теория систем (ОТС) и методы исследования систем. В прикладных научных направлениях учитывают специфику типичных задач, решаемых средствами тех или иных научных направлений. Такое разделение условно. В частности, метод имитационного моделирования, применяемый для исследований динамических систем (один из уровней абстрактной теории систем), становится мощным инструментом системотехники, системного анализа, исследования операций и т.д.

Существует множество определений ОТС. Можно назвать некоторые из них [11, 12].

С современных позиций *общая теория систем* – научное направление, связанное с разработкой совокупности философских, методологических, конкретно-научных и прикладных проблем анализа и синтеза сложных технологических и природных систем.

ОТС – междисциплинарная область научных исследований, в задачи которой входит: разработка обобщенных моделей систем; построение логико-методологического аппарата описания функционирования и поведения системных объектов; создание обобщенных теорий систем разного типа, включая теории динамики систем, их целенаправленного поведения, исторического развития, иерархического строения процессов управления в системах и т.д.

Наиболее характерной чертой ОТС, какую ей стремятся придать, создавая единую научную платформу, является её междисциплинарный характер. Основой для возможного единства принимают аналогичность (изоморфизм) процессов, протекающих в системах различного типа (технических, биологических, экономических, социальных). Строго доказанный изоморфизм для систем различной природы дает возможность переносить знания из одной области

в другую. Считают, что ОТС должна представлять собой область научных знаний, позволяющую изучать поведение, в том числе целенаправленное, систем любой сложности и любого назначения.

Это второе направление является действительно специфичным для количественных исследований систем. Определение термина «система» связано именно с развитием абстрактной теории систем и им обусловлено. При этом следует учитывать, что определение термина «система» полностью зависит от принятой математической модели реальной системы на базе постулированной теории. Поскольку математических моделей может быть сколь угодно много и все они определяются принятым уровнем абстрагирования, то нет и не может быть только одной формулировки для термина «система», так как определение этого термина в зависимости от принятого уровня абстрагирования является различным. Рассмотрение задач на каком-либо одном уровне абстракции позволяет дать ответы на определенную группу вопросов, а для получения ответов на другие вопросы необходимо провести исследование уже на другом уровне абстракции.

Обзор современного состояния математики и работ по абстрактной теории систем (АТС) позволяет выделить следующие уровни абстрактного описания систем:

- символический или, иначе, лингвистический;
- теоретико-множественный;
- абстрактно-алгебраический;
- топологический;
- логико-математический;
- теоретико-информационный;
- динамический;
- эвристический.

Анализируя возможности уровней абстрагирования можно сделать выводы:

- наиболее близка к практическому применению АТС, являющаяся составной частью ОТС;
- АТС имеет иерархическую структуру абстрагирования;
- чем ниже уровень абстрагирования, тем большей детализации можно достичь при описании систем;
- заслуживает внимание для практического изучения лесотехнических объектов динамический уровень;
- динамические системы можно представить и как системы, где процессы протекают непрерывно, и как системы, в которых все процессы совершаются в дискретные моменты времени.

Если рассматривать научные дисциплины, изучающие сложные системы, то для практического применения интересны те, в которых широко используются физико-математические методы для количественного описания систем, например, *исследование операций, теория надежности, теория массового обслуживания, системный анализ* и т.д.

При изучении функционирования ***сложных динамических систем*** можно выделить следующие основные подходы:

- непрерывно-детерминированный (D-схемы),
- дискретно-детерминированный (F-схемы),
- дискретно-стохастический (P-схемы),
- непрерывно-стохастический (Q-схемы),
- обобщенный, или универсальный (A-схемы).

В качестве *непрерывно-детерминированных* моделей в D-схемах, когда при исследовании случайные факторы не учитываются, для представления систем, функционирующих в непрерывном времени, используются дифференциальные, интегральные, интегродифференциальные и другие уравнения.

Особенности *дискретно-детерминированного* подхода (F-схемы) для описания функционирования систем хорошо просматриваются на примере использования в качестве математического аппарата теории автоматов.

Понятие F-автомата в дискретно-детерминированном подходе к исследованию на моделях свойств объектов является математической абстракцией, удобной для описания широкого класса процессов функционирования реальных объектов в автоматизированных системах управления, в частности, в устройствах контроля, регулирования и управления, в системах временной и пространственной коммутации в технике обмена информацией и т.д. Следует заметить, что широта применения F-схем не означает универсальности этих математических схем. Например, этот подход не пригоден для описания процессов принятия решений, процессов в динамических системах с наличием переходных процессов и стохастических элементов.

В общем виде *дискретно-стохастический* подход (P-схемы) можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит от состояния памяти в нем и может быть описано статистически.

Особенности *непрерывно-стохастического* подхода (Q-схемы) рассматриваются на примере использования типовых математических схем систем массового обслуживания. Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и в различных приложениях для формализации процессов функционирования систем, которые по своей сути являются процессами обслуживания. Характерным для систем массового обслуживания является случайное появление заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени, то есть стохастический характер их функционирования.

Наиболее известным общим подходом к формальному описанию процессов функционирования систем является подход, предложенный академиком Н.П. Бусленко. Этот подход позволяет описывать поведение непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических систем, то есть по сравнению с рассмотренными является обобщенным (универсальным) и базируется на понятии *агрегативной системы*, представляющей собой формальную схему общего вида, которая называется *A-схемой*.

Примеры использования типовых математических схем (D-, F-, P-, Q- и A-схем) позволяют формализовать достаточно широкий класс больших систем, с которыми приходится иметь дело в практике исследования и проектирования.

Исходной информацией при построении математических моделей функционирования систем служат данные о назначении и условиях работы, исследуемой (проектируемой) системы. Эта информация определяет основную цель моделирования системы и позволяет сформулировать требования к разрабатываемой математической модели. При этом уровень абстрагирования зависит от круга тех вопросов, на которые исследователь (проектант) системы хочет получить ответ с помощью модели, и в какой-то степени определяет выбор математической схемы.

Понятие «*математическая схема*» позволяет рассматривать математику не как метод расчёта, а как метод мышления, как средство формулирования понятий, что является наиболее важным при переходе от словесного описания системы к формальному представлению процесса её функционирования в виде некоторой математической модели (аналитической или имитационной).

Математическую схему можно определить как звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учётом воздействия внешней среды, то есть имеет место цепочка «описательная модель – математическая схема – аналитическая или (и) имитационная модель».

Вид математической модели зависит как от природы объекта, так и от задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности результатов решения поставленной задачи. Математическое моделирование для исследования характеристик процесса функционирования систем можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Для **аналитического моделирования** характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегро-дифференциальных, конечно-разностных и т. п.) или логических условий. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

а) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искоемых характеристик;

б) численным, когда, не имея возможности решать уравнения в общем виде, стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных;

в) качественным, когда, не имея решений в явном виде, можно найти некоторые свойства решений (например, оценить устойчивость решения).

Наиболее полное исследование процесса функционирования системы можно провести, если известны явные зависимости, связывающие искоемые характеристики с начальными условиями, параметрами и переменными системы S . Однако такие зависимости удастся получить только для сравнительно простых систем. При усложнении систем исследование их аналитическим методом сталкивается со значительными трудностями, которые часто бывают непреодолимыми. Поэтому, в случае использования аналитического метода, идут на существенное упрощение первоначальной модели, чтобы иметь возможность изучить хотя бы общие свойства системы. Такое исследование на упрощенной модели аналитическим методом помогает получить ориентировочные результаты для определения более точных оценок другими методами.

Численный метод по сравнению с аналитическим позволяет исследовать более широкий класс систем, но при этом полученные решения носят частный характер. Численный метод базируется на использовании компьютерных средств.

В отдельных случаях исследователя системы могут удовлетворить и те выводы, которые можно сделать при использовании *качественного метода* анализа математической модели. Такие качественные методы широко используются, например, в теории автоматического управления для оценки эффективности различных вариантов систем управления.

В настоящее время распространены ***методы машинной реализации*** исследования характеристик процесса функционирования больших систем. Для реализации математической модели в компьютерной системе необходимо построить соответствующий моделирующий алгоритм.

При *имитационном моделировании* реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы S во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы S .

Основным преимуществом имитационного моделирования по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и др., которые часто создают трудности при аналитических исследованиях. В настоящее время имитационное моделирование – наиболее эффективный метод исследования больших систем, а часто и единственный практически доступный метод получения информации о поведении системы, особенно на этапе ее исследования (проектирования).

Практика научных исследований показывает, что на первом этапе исследователь старается решить поставленную задачу аналитическими методами, в частности для решения задач массового обслуживания методами теории массового обслуживания (ТМО). Если

полученные результаты на моделях ТМО не дают нужной точности или громоздки в вычислениях, то исследователь переходит к имитационному моделированию, используя Q-схемы или A-схемы.

Таким образом, оснований начинать изучение вопросов проектирования технологических процессов лесопромышленных производств с изучения аналитических методов одного из инструментария ОТС – ТМО более чем достаточно, тем более что за 100-летнюю историю развития эта наука накопила богатейший арсенал как методик построения моделей, так и готовых математических моделей.

ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания (теория очередей) – раздел прикладной математики, изучающий процессы, связанные с удовлетворением массового спроса на обслуживание какого-либо вида, с учетом случайного характера спроса и обслуживания. ТМО возникла в начале XX века на базе задач телефонии.

В ТМО изучаются только такие случайные процессы, которые либо являются марковскими, либо некоторым образом связаны с марковскими процессами. Наиболее простая ситуация имеет место, когда входящий поток требований является пуассоновским потоком, а распределение длительности обслуживания требования подчиняется экспоненциальному распределению. В этом случае оказывается возможным описать функционирование системы массового обслуживания (СМО) марковским процессом с конечным или счетным множеством состояний.

В 60-х годах XX столетия, когда обнаружили, что многие формулы ТМО, выведенные в предположении о независимости длительностей обслуживания требований, сохраняют силу и при зависимых длительностях обслуживания, была построена теория для широкого класса систем. Для исследования сложных систем массового обслуживания широко применяется метод Монте-Карло, связанный с моделированием процесса поведения системы.

Первыми исследователями ТМО являются датский ученый А. Эрланг и советский математик А.Я. Хинчин. В своих работах А. Эрланг (1909–1922 гг.) исследовал систему массового обслуживания в связи с организацией телефонных сетей. Ряд задач из области многостаночного производства решил А.Я. Хинчин (1932–1933 гг.), а позднее разработал математическую теорию исследования систем массового обслуживания [13].

Развитие производства, техники, экономических связей в 50 годах привело к необходимости исследования новых СМО. В различных областях производства, техники, экономики успешно применяется ТМО, разрабатываются новые методы исследований, расширяется круг методов изучения и оптимизации СМО, поддающихся решению, ищутся новые пути практического приложения имеющихся теоретических результатов. Исследования ТМО имеют большое значение при проектировании и построении различных систем автоматизированного

управления производством и транспортом, для рациональной организации производства и снижения себестоимости продукции [13].

ТМО непосредственно не связана с оптимизацией. С ее использованием скорее пытаются разработать, изучить и сравнить различные ситуации, характеризующиеся образованием очереди, и, таким образом, косвенно достигнуть приближенной оптимизации. Методы ТМО в большей степени основаны на анализе, чем на синтезе. Методы синтеза используются для обобщений и определения направлений аналитических исследований новых проблем [14].

Специфика задач в лесной промышленности в полной мере соответствует методам теории массового обслуживания, поэтому магистранты профилей подготовки 35.04.02, 23.04.03 могут применять рассматриваемые ниже модели ТМО при выполнении диссертационных работ.

2.1. Системы массового обслуживания

2.1.1. Общие сведения

Теория массового обслуживания (ТМО), или теория очередей, изучает особый класс массовых явлений, касающихся людей, продуктов производства, машин, технологических процессов и других подобных объектов. ТМО стала необходимой частью исследования операций в области экономики, производства, транспорта [14, 15].

Некоторые примеры очередей:

- очередь покупателей лесопроductии у отдела сбыта лесопромышленного предприятия;
- очередь автомобилей (вагонов МПС), ожидающих погрузки лесопроductии на лесопромышленном складе;
- вышедшие из строя машины, станки и механизмы, поставленные в очередь для ремонта;
- ожидание лесопроductующим цехом пачек лесоматериалов.

Перечисленные операции объединяет нечто общее, а именно то обстоятельство, что каждая из них характеризуется необходимостью пребывать в состоянии ожидания.

Ожидание является прямым следствием вероятностного характера возникновения потребностей в том или ином виде обслуживания и разброса показателей соответствующих обслуживающих систем.

Функционирование СМО протекает следующим образом. Поступив в обслуживающую систему, требование (или, другими словами, заявка на обслуживание) присоединяется к очереди (ранее поступивших)

требований. Обслуживающий узел (прибор, механизм обслуживания) выбирает одно из находящихся в очереди требование с тем, чтобы приступить к его обслуживанию. После завершения процедуры обслуживания поступившего из очереди требования обслуживающая система приступает к обслуживанию следующего требования (если таковое в данный момент времени имеется в блоке ожидания).

Основными элементами, связанными с массовым обслуживанием любого вида, являются *заявка на обслуживание* (или *требование*) и *механизм обслуживания*, который, в случае однофазного обслуживания, а иногда и независимо от числа фаз обслуживания, называют *обслуживающей системой* (в случае многофазного обслуживания элементы обслуживающей системы в большинстве случаев называют либо *узлами обслуживания*, либо *обслуживающими устройствами*).

В ТМО оперируют понятиями *распределение моментов поступления требований* и *распределение времени обслуживания требований*. Эти распределения вероятностей могут моделировать ситуации, когда требования поступают и обслуживаются *индивидуально*, а также когда требования поступают и (или) обслуживаются *группами*. В последнем случае обычно говорят, что имеет место обслуживающая система с одновременным обслуживанием нескольких требований. Системы такого рода называют также обслуживающими системами с *параллельно-групповым обслуживанием*.

Важной характеристикой СМО является *дисциплина очереди*. Наиболее широко распространённой является дисциплина, определяемая правилом «первым пришёл – первым обслуживаешься (ПЕРППО)». Есть и другие: «последним пришёл – первым обслуживаешься (ПОСППО)», а также дисциплина очереди, определяемая правилом случайного отбора заявок (СОЗ). Существует обслуживание по критерию *приоритетности* (требования с более высоким приоритетом обслуживаются раньше).

СМО характеризуется структурой. Обслуживающая система может иметь не один, а несколько устройств (или узлов) обслуживания параллельно или последовательно расположенных. Для систем такого рода можно считать вполне оправданным название «система массового обслуживания с сетевой структурой».

Необходимо иметь в виду и такие характеристики СМО как *допустимая вместимость блока ожидания* или *допустимая длина очереди*; характер источника требований, генерирующий заявки на обслуживание (ограниченной или конечной ёмкости, или бесконечной ёмкости).

Таким образом, из функциональных возможностей любой модели массового обслуживания (МО) можно выделить следующие:

- распределение моментов поступлений заявок на обслуживание (единичных и групповых);
- распределение продолжительностей обслуживания (при индивидуальном или групповом обслуживании);
- конфигурация обслуживающей системы (последовательное, параллельное или параллельно-последовательное обслуживание);
- дисциплина очереди (ПЕРППО, ПОСППО, СОЗ) и приоритетные характеристики обслуживаемой системы;
- вместимость блока ожидания (ограниченная или неограниченная);
- ёмкость (или мощность) источника требований (конечная или бесконечно большая);
- бихевиоральная характеристика системы (факторы, ассоциированные с поведением человеческих индивидуумов): возможность клиентов переходить из одной очереди в другую, ненулевая вероятность отказов от ожидания либо сразу при поступлении в обслуживающую систему, либо после непродолжительной задержки в очереди).

Можно построить столько моделей МО, сколько существует различных комбинаций перечисленных операционных характеристик, ассоциированных с понятием «массовое обслуживание» (рис. 2.1).

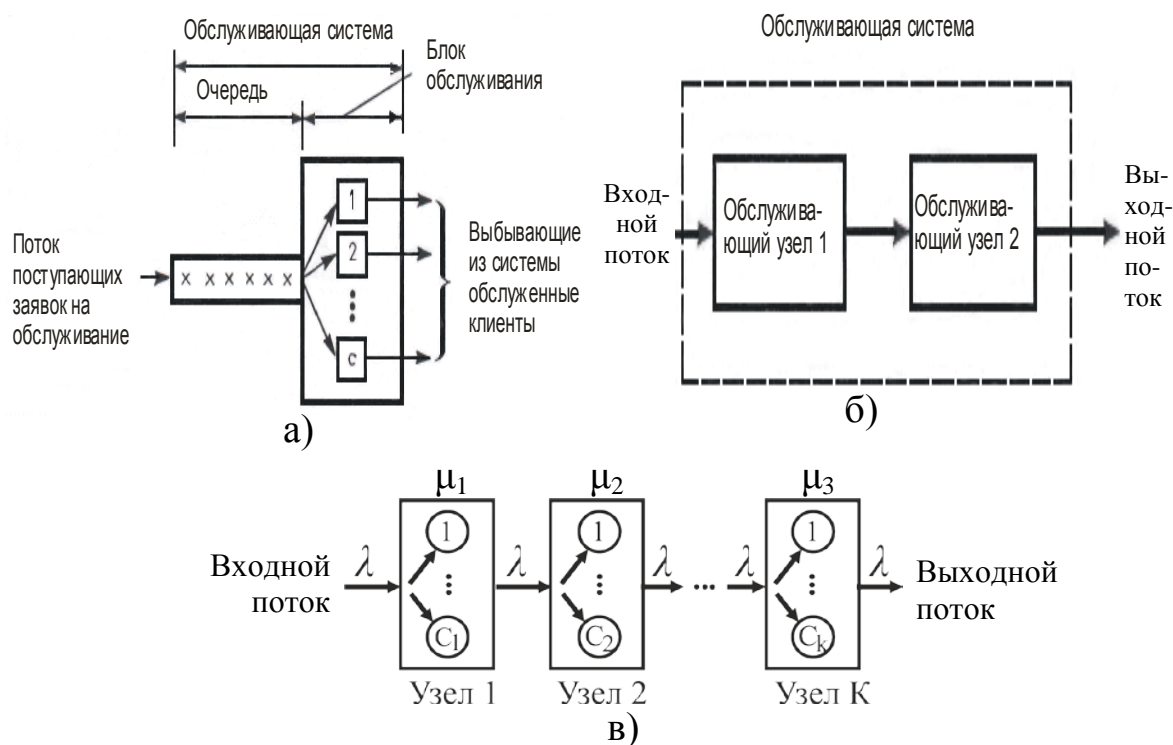


Рис. 2.1. Схемы систем массового обслуживания: а – СМО с параллельно функционирующими узлами (приборами); б – СМО с двумя узлами обслуживания, функционирующими в tandem; в – k -фазная (k -канальная) модель СМО

Для СМО разработаны обозначения. Они унифицированы и применительно к параллельно-функционирующим узлам (приборам) и имеют следующую структуру:

$$(a/b/c) : (d/e/f),$$

где символы a , b , c , d , e и f ассоциированы с конкретными наиболее существенными элементами модельного представления процессов массового обслуживания и интерпретируются следующим образом:

a – распределение моментов поступлений заявок на обслуживание;

b – распределение времени обслуживания (или выбытий обслуженных клиентов);

c – число параллельно функционирующих узлов обслуживания ($c = 1, 2, \dots, \infty$);

d – дисциплина очереди (ПЕРПЮ, ПОСПЮ, СОЗ);

e – максимальное число допускаемых в систему требований (число требований в очереди + число требований, принятых на обслуживание);

f – ёмкость источника, генерирующего заявки на обслуживание.

Для конкретизации элементов a и b приняты следующие стандартные обозначения:

M – пуассоновское (или марковское) распределение моментов поступлений заявок на обслуживание или выбытий из системы обслуженных клиентов (или экспоненциальное распределение интервалов времени между моментами последовательных поступлений или продолжительностей обслуживания клиентов);

D – фиксированный (детерминированный) интервал времени между моментами последовательных поступлений в систему заявок на обслуживание или детерминированная (фиксированная) продолжительность обслуживания;

E_k – распределение Эрланга или гамма-распределение интервалов времени между моментами последовательных поступлений требований в обслуживающую систему или продолжительностей обслуживания (при этом под k понимается параметр распределения);

GI – распределение произвольного вида моментов поступления в систему заявок на обслуживание или интервалов времени между последовательными поступлениями требований (GI – General Independent – общий независимый);

G – распределение произвольного вида моментов выбытия из системы обслуженных клиентов (или продолжительностей обслуживания).

Для примера рассмотрим структуру $(M/D/10) : (GD/N/\infty)$.

В соответствии с принятыми обозначениями здесь речь идет о системе (и, соответственно, о модели) МО с пуассоновским входным потоком, фиксированным временем обслуживания и десятью параллельно функционирующими узлами обслуживания. Дисциплина очереди не регламентирована, что подчеркивается парой символов GD. Кроме того, независимо от того, сколько требований поступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь + обслуживаемые клиенты) не может вместить более N требований (клиентов), то есть клиенты, не попавшие в блок ожидания, вынуждены обслуживаться в другом месте. Наконец, источник, порождающий заявки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно большую) емкость.

Большое практическое значение ТМО уже доказано, что видно из множества задач, для решения которых она успешно применялись.

Перечислим важные показатели, используемые при исследовании систем в стационарном и переходном состоянии (зависящем от времени):

- интенсивность входящего потока;
- интенсивность обслуживания;
- загрузка системы, равная отношению среднего времени обслуживания к среднему промежутку времени между последовательными моментами поступления требований;
- вероятность того, что в очереди или в системе находится определенное число требований n ;
- среднее число требований в очереди (или в системе, то есть сюда входит еще и среднее число обслуживаемых требований);
- распределение времени ожидания в очереди или распределение времени пребывания в системе;
- среднее и дисперсия времени ожидания.

В том случае, когда приходится иметь дело с клиентами, требующими срочного обслуживания, или скоропортящимися продуктами, важно знать вероятность того, что ожидание продлится больше допустимого времени.

Важными показателями являются также следующие:

- вероятность обслуживания без ожидания (доля требований, ожидающих обслуживания, находится путем вычитания этой величины из единицы);
- вероятность того, что заявка (клиент) будет ожидать;
- среднее число требований, ожидающих обслуживания;
- средняя длительность интервала занятости;
- среднее число обслуженных требований.

Для требований, на обслуживание которых затрачивается мало времени, необходимо знать отношение среднего времени ожидания к среднему времени обслуживания. Важно вычислить также вероятность того, что занято ровно n ($0 \leq n \leq c$) каналов, среднее число незанятых каналов, коэффициент простоя каналов, коэффициент занятости (то есть долю времени, в течение которого канал занят), среднее число требований, не поступивших в систему, применительно к случаю конечной совокупности, вероятность потери требования (заявки) и т.д.

Во многих задачах теории массового обслуживания рассматриваются финансовые характеристики системы. Поэтому выполняется анализ стоимости различных действий, чтобы получить следующие показатели:

- стоимость всей операции;
- стоимость дополнительного канала по сравнению с затратами на увеличение объема обслуживания в канале, стоимость выбранной дисциплины очереди;
- стоимость ожидания обслуживания в течение определенного времени;
- стоимость содержания большего числа каналов по сравнению с затратами при использовании места для ожидания в других целях;
- стоимость размещения очереди различной длины;
- стоимость мест для ожидания различной вместимости и стоимость управления распределением входящего потока (например, можно сравнить стоимость процесса при случайном прибытии самолетов в соответствии с определенным распределением и при регулярном входящем потоке при данном распределении времени обслуживания).

Кроме того, можно рассматривать показатели использования обслуживающего устройства и производительность (число требований, обслуженных в единицу времени). Важно знать возможные убытки вследствие потери клиентов, а также оценивать, во что обходится клиентам ожидание в очереди.

Заметим, что, решив практическую задачу МО путем увеличения числа лиц, производящих обслуживание, можно создать другую очередь, а именно очередь тех, кто производит обслуживание. Теперь они должны ожидать клиентов, нуждающихся в их услугах. В этом смысле может создаваться перегрузка иного рода (когда каналы простаивают) при ликвидации первоначальной (менее желательной) перегрузки.

2.1.2. Методы математического описания систем массового обслуживания

Наибольший интерес с практической точки зрения представляют исследования вероятностных СМО, в функционировании которых принимают участие вероятностные факторы: случайные величины, системы взаимозависимых случайных величин, случайные процессы различной природы. Исследование вероятностных СМО представляет собой специфический раздел теории случайных процессов [13].

В большинстве случаев никакое указание на принадлежность СМО к определенному классу систем не определяет полностью ни структуры системы, ни алгоритма её функционирования. Для выявления структуры системы и алгоритма её функционирования необходимо подробное словесное или математическое описание этой системы.

Описание системы независимо от формы его задания должно содержать сведения о вероятностных факторах, влияющих на систему. Одним из наиболее универсальных и самых распространённых методов математического описания СМО, являющимся одновременно и методом математического исследования таких систем, служит аппарат вероятностных *марковских процессов*. В каждый момент времени система может быть охарактеризована с помощью некоторого вектора, компонентами которого служат временные характеристики системы. Изменение значений этого вектора во времени определяют с помощью либо стохастической матрицы вероятностей перехода, либо некоторой системой уравнений: разностных, дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, стохастических и т.д. Распространёнными методами решения таких уравнений и получения окончательных результатов исследования СМО служат методы операционного исчисления, особенно метод производящих функций и интегральных преобразований.

При исследовании достаточно сложных СМО, для которых марковский вектор состояний имеет большую размерность, применение аппарата марковских процессов в чистом виде становится затруднительным. В этих случаях приходится применять другие, более тонкие методы описания и исследования систем. Одним из таких методов является метод вложенных цепей Маркова, заключающийся в рассмотрении состояний системы не во все моменты времени её функционирования, а лишь в определённые моменты, когда компоненты Марковского вектора состояний, интересующие исследователя, образуют *цепь Маркова*.

При описании и исследовании СМО успешно применяется такой эффективный метод, как метод полумарковских процессов.

Во многих случаях возникает необходимость при описании системы учитывать изменение размерности Марковского вектора состояний функционирования СМО. При этом бывает удобно пользоваться аппаратом марковских процессов. Задание такого процесса обычно осуществляется с помощью вектора, одна из компонент которого является целочисленной и показывает размерность состояния системы в данный момент времени. Из других методов описания и исследования систем, применяемых при изучении СМО, следует указать на процессы с дискретным вмешательством случая, процессы, управляемые марковской цепью, управляемые полумарковские процессы и т.д. Если исследуемая система настолько сложна по своей структуре и алгоритму функционирования, что изучать её перечисленными аналитическими методами затруднительно, прибегают к методам имитационного моделирования с использованием ЭВМ.

При исследовании СМО, особенно систем с ожиданием, весьма существенным является вопрос о существовании для системы стационарного режима функционирования, то есть вопрос о возможности установления для системы со временем такого устойчивого равновесия состояний, при котором каждому состоянию системы из определённого множества состояний соответствует определённая, не изменяющаяся в дальнейшем частота появления. Для одних и тех же СМО в зависимости от значений параметров системы стационарный режим может либо существовать, либо не существовать. Условия существования стационарного режима СМО обычно могут быть записаны в виде систем неравенств и равенств относительно параметров системы и моментов случайных величин, влияющих на её работу. Определение условий существования стационарного режима – один из важнейших этапов исследования СМО. Для его осуществления обычно применяются различные эргодические теоремы *теории вероятностей*.

В зависимости от задач, стоящих перед исследователем, целью исследования может быть вычисление того или иного неслучайного функционала от характеристик системы. Чаще всего таким функционалом оказываются показатели распределений вероятностей определённых характеристик системы (например, длины очереди, времени ожидания, периода занятости и т.д.). Если исследование носит оптимизационный характер, вычисляемый функционал имеет вид *целевой функции*, отвечающей выбранному критерию эффективности системы.

Оптимизация СМО заключается в определении значений параметров системы, её структуры или таких алгоритмов функционирования, при которых целевая функция принимает экстремальное значение. Эту задачу иногда удаётся выполнить, применяя методы линейного, динамического или эвристического программирования.

2.2. Марковские случайные процессы

2.2.1. Классификация состояний. Ориентированный граф состояний. Классификация групп состояний

При анализе систем МО рассматриваются случайные процессы. В ТМО при изучении систем под *случайным процессом* понимается процесс, который в ходе опыта протекает так, что заранее (до опыта) нет возможности в точности предсказать, как именно будет протекать этот процесс.

Системы (процессы) $X(t)$, которые в любой момент времени t могут находиться в одном из своих состояний x_0, x_1, \dots, x_n , называются дискретными случайными системами (процессами). В основном в ТМО исследуются системы с конечным числом состояний, что вполне достаточно при рассмотрении прикладных задач [16].

Событие, состоящее в том, что система в момент времени t находится в состоянии x_i , обозначается

$$X(t) = x_i, \quad (i = \overline{0, n}), \quad (2.1)$$

а вероятность этого события

$$p_i(t) = P(X(t) = x_i), \quad (i = \overline{0, n}). \quad (2.2)$$

Очевидно, что для любого момента времени t должно выполняться следующее нормировочное условие:

$$\sum_{i=0}^n p_i(t) = 1. \quad (2.3)$$

Одна из основных задач исследования обычно состоит в отыскании вероятностей $p_i(t)$ для различных систем и процессов.

Обозначим через X множество всех состояний: $X = \{x_0, \dots, x_n\}$. В процессе функционирования система (процесс) может переходить из одного состояния в другое. Например, если в начальный момент $t = 0$

система (процесс) находилась в состоянии $x_0[X(0) = x_0]$, то в какой-то момент времени t_0 она может перейти в состояние $x_1(X(t_0) = x_1)$. Считается что переход системы (процесса) из одного состояния в другое осуществляется мгновенно (скачком), то есть время перехода из состояния в состояние равно нулю.

Таким образом, рассматриваемую систему (процесс) можно интерпретировать как некоторую точку, которая в какие-то моменты времени (в общем случае случайные) переходит из одного состояния в другое, определяя динамический характер самой системы. Другими словами, точка осуществляет случайные блуждания по своим возможным состояниям. Множество всех состояний системы (процесса) $X = \{\overline{x_0}, \overline{x_n}\}$ рассматривается как множество вершин некоторого графа, а процесс перехода из состояния в состояние – как процесс блуждания точки по вершинам этого графа.

Вершину графа x_i (состояние x_i) принято изображать в виде прямоугольника с вписанным внутри него обозначением состояния (рис. 2.2).

Вершина графа x_i может быть либо соединена, либо не соединена с вершиной $x_j (i = \overline{0, n}; j = \overline{0, n}; i \neq j)$. Это эквивалентно тому, что система (процесс), попав в состояние x_i , либо непосредственно переходит из этого состояния в состояние x_j , (минуя все другие состояния), либо такого непосредственного перехода осуществить не может (хотя в этом случае возможен переход из состояния x_i в состояние x_j через другие состояния). Линии, соединяющие вершины (состояния), называются *ребрами*.



Рис. 2.2. Вершина графа

Таким образом, каждой паре вершин x_i и x_j $i \neq j$ можно поставить в соответствие некоторое число (ребро) $R(x_i, x_j)$, которое может принимать два значения: $R(x_i, x_j) = 1$, если вершина x_i соединена ребром с вершиной x_j (то есть если возможен непосредственный переход из состояния x_i в состояние x_j); $R(x_i, x_j) = 0$, если вершина x_i не соединена ребром с вершиной x_j (то есть если невозможен непосредственный переход из состояния x_i в состояние x_j).

Схематически возможность непосредственного перехода из состояния x_i в состояние x_j изображается следующим образом (рис. 2.3): между вершиной x_i и вершиной x_j проводится ориентированное ребро, которое представляет собой стрелку, выходящую из вершины (состояния) x_i и входящую в вершину (состояние) x_j .

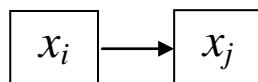


Рис. 2.3. Ориентированный граф состояний

Если непосредственный переход из состояния x_i в состояние x_j , невозможен, то на схеме никакого ребра не будет (состояния x_i и x_j не соединяются стрелкой).

Для ориентированного ребра $R(x_i, x_j)$ (стрелки) вершина x_i называется начальной вершиной, вершина x_j – конечной вершиной. Так как рассматривается процесс перехода из состояния в состояние, то $R(x_i, x_j) = 0$ для любых $i = \overline{0, n}$ (петли в графах состояний не рассматриваются).

Если $R(x_i, x_j) = 1$, то говорят, что вершина x_i является соседней по отношению к вершине x_j . Если $R(x_i, x_j) = R(x_j, x_i) = 1$, то вершины x_i и x_j являются соседними.

Таким образом, любая дискретная система (процесс) $X(t)$ характеризуется, прежде всего, ориентированным графом состояний $G(X)$, который представляет собой схему возможных переходов из состояния в состояние, на которой нанесены вершины (состояния), соединенные ориентированными ребрами. Такому ориентированному графу состояний соответствует квадратная матрица размерности $(n+1) \times (n+1)$, состоящая из нулей и единиц, элементами которой $a_{i,j}$ являются ребра $R(x_i, x_j)$:

$$\|a_{i,j}\| = \|R(x_i, x_j)\|. \quad (2.4)$$

По главной диагонали этой матрицы стоят нули, так как $R(x_i, x_j) = 0$ ($i = \overline{0, n}$).

Дадим следующую **классификацию состояний**.

Состояние x_i , называют *изолированным*, если выполняется условие

$$\sum_{j=0}^n R(x_i, x_j) = \sum_{j=0}^n R(x_j, x_i) = 0,$$

то есть если система не может перейти в состояние x_i или выйти из него. Состояние x_i называют *концевым* (поглощающим), если выполняются совместно два условия:

$$\sum_{j=0}^n R(x_i, x_j) = 0; \quad \sum_{j=0}^n R(x_j, x_i) > 0, \quad (2.5)$$

то есть если из состояния x_i система уже ни в какое другое состояние перейти не может, но хотя бы из одного состояния $x_j (i \neq j)$ может перейти в состояние x_i . Поглощающее состояние изображено на рис. 2.4.

Состояние x_i называется *начальным* (источником), если выполняется совместно два условия:

$$\sum_{j=0}^n R(x_j, x_i) = 0; \quad \sum_{j=0}^n R(x_i, x_j) > 0. \quad (2.6)$$

Эти условия эквивалентны тому, что система может выйти из состояния x_i (если она в нем находилась) и перейти в какое-либо другое состояние, но попасть в состояние x_i из какого-либо другого состояния она (система) не может (рис. 2.5).

Состояние x_i называется *транзитивным* (рис. 2.6), если выполняются совместно два неравенства:

$$\sum_{j=0}^n R(x_i, x_j) > 0; \quad \sum_{j=0}^n R(x_j, x_i) > 0. \quad (2.7)$$

Система, попав в транзитивное состояние, рано или поздно его покинет.

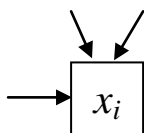


Рис. 2.4. Поглощающее состояние вершины графа

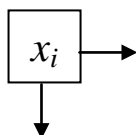


Рис. 2.5. Начальное состояние вершины графа

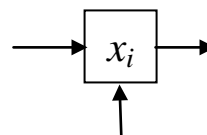


Рис. 2.6. Транзитивное состояние вершины графа

Маршрутом при блуждании точки по вершинам (состояниям), образующим множество X , называется такая последовательность ребер, когда два соседних ребра имеют общую (промежуточную)

вершину. Например, $M[R(x_1, x_2); R(x_2, x_3); R(x_3, x_5)]$ – это маршрут, выходящий из вершины x_1 , проходящий через вершины x_2 и x_3 и заканчивающийся в вершине x_5 . Коротко маршрут (если такой существует), связывающий вершины x_k, x_{k+1}, \dots, x_l обозначают $M(x_k, \dots, x_l)$. Вершину x_k будем называть *началом маршрута*, вершину x_l – концом маршрута, все остальные вершины маршрута – *промежуточными*.

Положим $M(x_k, \dots, x_l) = 1$, если маршрут, проходящий через вершины x_k, \dots, x_l существует, и $M(x_k, \dots, x_l) = 0$, если такого маршрута не существует. Очевидно, что в этом случае $M(x_k, \dots, x_l) = \sum_{j=k}^l R(x_j, x_{j+1})$, так как для существования маршрута между вершинами x_k, \dots, x_l нужно существование ребер между этими вершинами.

Если $x_k = x_l$, то маршрут называется *циклическим*.

Маршрут между вершинами x_k, \dots, x_l называется путем, а циклический маршрут – *контуром* $[P(x_k, \dots, x_l)]$, если каждое ребро, из которого состоит маршрут, встречается в нем один раз. Если путь между вершинами x_k и x_l существует, то считается $P(x_k, \dots, x_l) = 1$, в противном случае $P(x_k, \dots, x_l) = 0$.

Можно показать, что если маршрут $M(x_k, \dots, x_l) = 1$, то и путь $P(x_k, \dots, x_l) = 1$. Из нескольких путей, связывающих вершины x_k и x_l , минимальным будет путь, который состоит из минимального числа ребер. Такой путь может быть не единственным.

Состояние (вершина) x_i называется связанным с состоянием (вершиной) x_j , если маршрут $M(x_i, \dots, x_j) = 1$. Таким образом, состояние x_i является соседним по отношению к состоянию x_j , если состояние x_i связано с состоянием x_j путем, состоящим из одного ребра:

$$M(x_i, x_j) = P(x_i, x_j) = R(x_i, x_j) = 1.$$

Состояния (вершины) x_i и x_j , называются *взаимно связанными*, если маршруты $M(x_i, \dots, x_j) = M(x_j, \dots, x_i) = 1$.

Состояния (вершины) x_i и x_j называются *связанными*, если выполняется только одно из двух условий:

- а) $M(x_i, \dots, x_j) = 1$ и $M(x_j, \dots, x_i) = 0$;
- б) $M(x_i, \dots, x_j) = 0$ и $M(x_j, \dots, x_i) = 1$.

Перейдем к *классификации групп состояний* (подмножеств состояний). Рассмотрим некоторые подмножества состояний $Y \in X$, при этом мы не будем рассматривать случай, когда подмножество Y является пустым.

Подмножество состояний Y называется *замкнутым* (концевым), если не существует маршрута, соединяющего любое состояние этого множества x_i с каким-либо состоянием множества Y , являющегося дополнением множества \bar{Y} :

$$M(x_i, \dots, x_j) = 0 \quad (x_i \in Y; \quad x_j \in \bar{Y} = X - Y).$$

Другими словами, подмножество состояний Y является замкнутым, если система, попав в одно (или находясь в одном) из состояний $x_i \in Y$, выйти из этого подмножества состояний не может. Концевое (поглощающее) состояние представляет собой замкнутое подмножество, состоящее из одного состояния.

Подмножество состояний Y называется *связным*, если любые два состояния $x_i \in Y$ и $x_j \in Y$ являются связанными.

Подмножество состояний Y называют *эргодическим*, если оно является замкнутым и связным одновременно.

Подмножество состояний Y называется *незамкнутым*, если для любого состояния $x_i \in Y$ – существующий маршрут, выводящий процесс за пределы подмножества Y , то есть найдется такое $x_j \in Y$, что $M(x_i, \dots, x_j) = 1 \quad (x_i \in Y)$.

Подмножество состояний Y назывался *начальным*, если для любого $x_j \in Y$ не существует маршрута, соединяющего это состояние с каким-либо состоянием $x_i \in Y$:

$$M(x_j, \dots, x_i) = 0, \quad (x_i \in Y, \quad x_j \in \bar{Y}),$$

и, с другой стороны, подмножество Y является незамкнутым. Если в какой-либо момент времени t известно, что система не находится в начальном подмножестве состояний, то она никогда туда не вернется.

Подмножество состояний Y называется *транзитивным*, если оно является незамкнутым и для любого состояния $x_i \in Y$ найдется хотя бы одно такое состояние $x_j \in Y$, что $M(x_j, \dots, x_i) = 1$.

При исследовании различных систем потребуется анализировать процессы блуждания системы по состояниям подмножества $Y \subset X$ и в связи с этим составлять ориентированные графы для этих подмножеств состояний Y . Введем несколько, обозначений.

Ориентированным подграфом $G(Y)$ состояний подмножества называется такая часть ориентированного графа $G(X)$, множество вершин которого равно Y , а ребро $R(x_i, x_j)$ этого подграфа $G(Y)$ равно ребру графа $G(X)$, если $x_i \in Y$ и $x_j \in Y$. Другими словами, ребро $R(x_i, x_j)$ подграфа $G(Y)$ остается таким же, как и ребро графа $G(X)$, если начальная и конечная вершины этого ребра принадлежат множеству Y .

Преобразованным ориентированным подграфом $G(Y)$ состояний подмножества Y называется такая часть ориентированного графа $G(X)$, множество вершин которого равно Y , а хотя бы одно ребро $R(x_i, x_j)$ этого подграфа $G(Y)$ не равно ребру графа $G(X)$, если $x_i \in Y$ и $x_j \in Y$, то есть часть ребер «преобразуется» (либо исключается, либо вводится новое).

2.2.2. Потоки событий

Потоком событий называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток автопоездов по лесовозной дороге, поток сортиментов от раскряжевочной установки и т.п.

Поток событий наглядно изображается рядом точек с абсциссами θ_1 и $\theta_2, \dots, \theta_n$, (рис. 2.7) [17] с интервалами между ними: $T_1 = \theta_2 - \theta_1$; $T_2 = \theta_3 - \theta_2, \dots, \theta_2, \dots$; $T_n = \theta_{n+1} - \theta_n$. При его вероятностном описании поток событий может быть представлен как последовательность случайных величин: θ_1 ; $\theta_2 = \theta_1 + T_1$; $\theta_3 = \theta_1 + T_1 + T_2$; \dots .

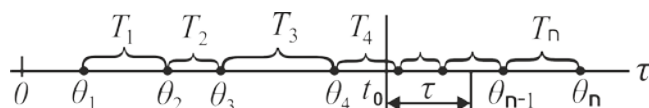


Рис. 2.7. Схема потока событий

Термин «событие» в понятии «поток событий» совершенно отличен по смыслу от термина «случайное событие» в теории вероятностей. В частности, не имеет смысла говорить о вероятностях «событий», образующих поток (например, о «вероятности вызова» ремонтников в цех: ясно, что рано или поздно вызов придет, и не один). С «поток событий» можно связывать различные случайные события, например:

A – {в течение времени от t_0 до $t_0 + \tau$ придет хотя бы один вызов} или B – {в течение того же времени придут ровно два вызова}. Вероятности таких событий можно вычислять.

Заметим также, что на рисунке в виде ряда точек можно изобразить не сам поток событий (он случаен), а только какую-то его конкретную реализацию.

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от выбора начала отсчета или, более конкретно, если вероятность попадания того или другого числа событий на любой интервал времени зависит только от длины этого интервала и не зависит от того, где именно на оси θt он расположен.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный интервал времени Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Практически ординарность потока означает, что события в нем появляются поодиночке, а не группами по два, по три и т. д. (точное совпадение моментов появления двух событий теоретически возможно, но имеет нулевую вероятность).

Ординарный поток событий можно интерпретировать как случайный процесс $X(t)$ – число событий, появившихся до момента t (рис. 2.8). Случайный процесс $X(t)$ скачкообразно возрастает на одну единицу в точках $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

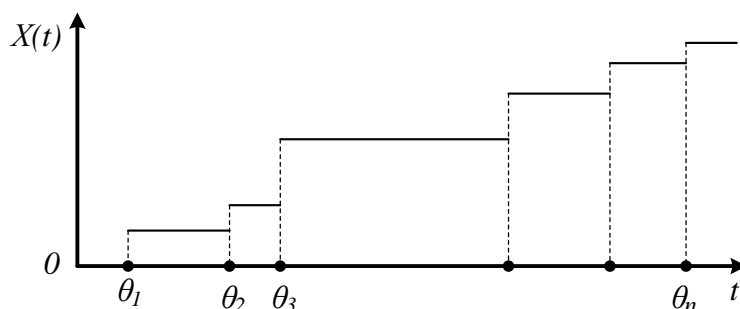


Рис. 2.8. Схема ординарного потока событий

Поток событий называется потоком без *последствия*, если число событий, попадающих на любой интервал времени t , не зависит от того, сколько событий попало на любой другой не пересекающийся с ним интервал. Практически отсутствие последствия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга.

Поток событий называется *простейшим*, если он стационарен, ординарен и не имеет последствия.

Интервал времени T между двумя соседними событиями простейшего потока имеет показательное распределение

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\text{при } t > 0), \quad (2.8)$$

где $\lambda = 1/M$ – величина, обратная среднему значению интервала T .

Ординарный поток событий без последствия называется *пуассоновским*. Простейший поток есть частный случай пуассоновского (а именно стационарный пуассоновский поток).

Интенсивностью λ потока событий называется среднее число (математическое ожидание числа) событий, приходящееся на единицу времени. Для стационарного потока $\lambda = \text{const}$; для нестационарного потока интенсивность в общем случае зависит от времени: $\lambda = \lambda(t)$.

Мгновенная интенсивность потока $\lambda(t)$ определяется как предел отношения среднего числа событий, которые произошли за элементарный интервал времени $(t, t + \Delta t)$, к длине Δt этого интервала, когда она стремится к нулю. Среднее число событий, наступающих в интервале времени τ , следующем непосредственно за моментом t_0

(см. рис. 2.7), равно $a(t_0, \tau) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt$. Если поток событий стационарный, то $a(t_0, \tau) = a(\tau) = \lambda \tau$.

Ординарный поток событий называется *поток Пальма* (или *рекуррентным* потоком, или потоком с ограниченным последствием), если интервалы времени T_1, T_2, \dots между последовательными событиями (см. рис. 2.7) представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины. В связи с одинаковостью распределений T_1, T_2, \dots поток Пальма всегда стационарен. Простейший поток является частным случаем потока Пальма; в нем интервалы между событиями распределены по показательному закону (2.8), где λ – интенсивность потока.

Потоком Эрланга k -го порядка называется поток событий, получающийся «прореживанием» простейшего потока, когда сохраняется каждая k -я точка (событие) в потоке, а все промежуточные выбрасываются (см. рис. 2.9, где показано получение потока Эрланга 4-го порядка из простейшего потока).



Рис. 2.9. Поток Эрланга

Интервал времени между двумя соседними событиями в потоке Эрланга k -го порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин T_1, T_2, \dots, T_k , имеющих показательное распределение с параметром λ :

$$T = \sum_{i=1}^k T_i. \quad (2.9)$$

Закон распределения случайной величины T называется законом Эрланга k -го порядка и имеет плотность

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (\text{при } t > 0). \quad (2.10)$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины T (2.9) соответственно равны:

$$m_t = k/\lambda; \quad D_t = k/\lambda^2; \quad \sigma_t = \sqrt{k/\lambda}. \quad (2.11)$$

Коэффициент вариации случайной величины (2.9) равен

$$\nu_t = \sigma_t / m_t = 1/\sqrt{k}, \quad (2.12)$$

где $\nu_t \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то есть при увеличении порядка потока Эрланга «степень случайности» интервала между событиями стремится к нулю.

Если одновременно с «прореживанием» простейшего потока изменять масштаб по оси Ot (делением на k), получится *нормированный* поток Эрланга k -го порядка, интенсивность которого не зависит от k . Интервал времени \tilde{T} между соседними событиями в нормированном потоке Эрланга k -го порядка имеет плотность

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\lambda t} \quad (\text{при } t > 0). \quad (2.13)$$

Числовые характеристики случайной величины

$$\tilde{T} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k T_i$$

равны:

$$M|\tilde{T}| = 1/\lambda; \quad D|\tilde{T}| = 1/k\lambda^2; \quad \tilde{\sigma}_t = 1/(\lambda\sqrt{k}); \quad \nu_t = 1/\sqrt{k}. \quad (2.14)$$

При увеличении k нормированный поток Эрланга неограниченно приближается к регулярному потоку с постоянным интервалом $l = 1/\lambda$ между событиями.

Случайный процесс, протекающий в какой-либо физической системе S , называется марковским (или процессом без последствия), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени t_0 (рис. 2.10) вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние (иначе: при фиксированном настоящем будущее не зависит от предыстории процесса – от прошлого).

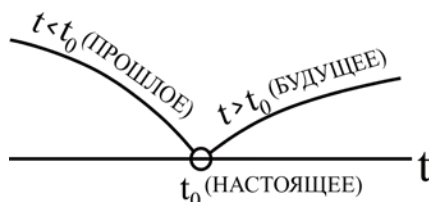


Рис. 2.10. Интерпретация случайного процесса без последствия

Будем рассматривать только марковские процессы с дискретными состояниями s_1, s_2, \dots, s_n . Такие процессы удобно иллюстрировать с помощью графа состояний (рис. 2.11), где прямоугольниками обозначаются состояния s_1, s_2, \dots системы S , а стрелками – возможные переходы из состояния в состояние. На графе обычно отмечают только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Иногда на графе состояний отмечают не только возможные переходы из состояния в состояние, но и возможные задержки в прежнем состоянии; это изображается стрелкой («петлей»), направленной из данного состояния в него же, но можно обходиться и без этого. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным).

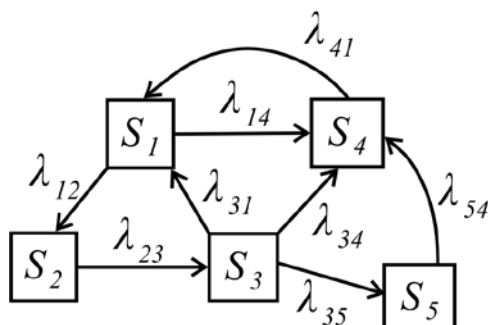


Рис. 2.11. Размеченный граф состояний

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем обычно называют *марковской цепью*. Для такого процесса моменты t_1, t_2, \dots , когда система S может менять свое состояние, удобно рассматривать как последовательные шаги процесса,

а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, рассматривать не время t , а номер шага: $1, 2, \dots, k, \dots$. Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний

$$S(0), S(1), S(2), \dots, S(k), \dots, \quad (2.15)$$

где $S(0)$ – начальное состояние системы (перед первым шагом);

$S(1)$ – состояние системы непосредственно после первого шага;

$S(k)$ – состояние системы непосредственно после k -го шага.

Событие $\{S(k) = s_i\} = \{\text{сразу после } k\text{-го шага система находится в состоянии } s_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) является случайным событием, поэтому последовательность состояний (2.15) можно рассматривать как последовательность случайных событий. Начальное состояние $S(0)$ может быть как заданным заранее, так и случайным. О событиях последовательности (2.15) говорят, что они образуют марковскую цепь.

Рассмотрим процесс с n возможными состояниями s_1, s_2, \dots, s_n . Если обозначить $X(t)$ номер состояния, в котором находится система S в момент t , то процесс (марковская цепь) описывается целочисленной случайной функцией $X(t) > 0$, возможные значения которой равны $1, 2, \dots, n$. Эта функция совершает скачки от одного целочисленного значения к другому в заданные моменты t_1, t_2, \dots (рис. 2.12) и является непрерывной слева, что отмечено точками.

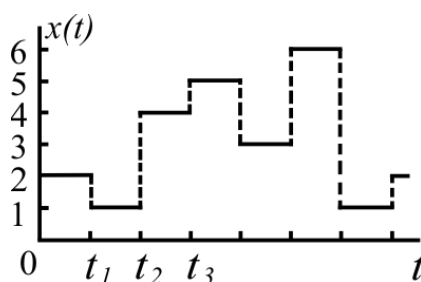


Рис. 2.12. Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем (марковская цепь)

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем иногда называют «непрерывной цепью Маркова». Для такого процесса вероятность перехода из состояния s_i в s_j для любого момента времени равна нулю. Вместо вероятности перехода P_{ij} рассматривают плотность вероятности перехода λ_{ij} , которая определяется как предел отношения вероятности перехода из состояния s_i в состояние s_j за малый промежуток времени Δt , примыкающий к моменту t , к длине этого промежутка, когда она стремится к нулю.

Плотность вероятности перехода может быть как постоянной ($\lambda_{ij} = \text{const}$), так и зависящей от времени [$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$]. В первом случае марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется однородным.

Типичный пример такого процесса – случайный процесс $X(t)$, представляющий собой число появившихся до момента t событий в простейшем потоке (см. рис. 2.8).

При рассмотрении случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно представлять себе переходы системы S из состояния в состояние как происходящие под влиянием некоторых потоков событий. При этом плотности вероятностей перехода получают смысл интенсивностей λ_{ij} соответствующих потоков событий (как только происходит первое событие в потоке с интенсивностью λ_{ij} , система из состояния s_i скачком переходит в s_j). Если все эти потоки пуассоновские (то есть ординарные и без последствий, с постоянной или зависящей от времени интенсивностью), то процесс, протекающий в системе S , будет марковским.

Рассматривая марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, очень удобно пользоваться графом состояний, на котором против каждой стрелки, ведущей из состояния s_i в состояние s_j , проставлена интенсивность λ_{ij} потока событий, переводящего систему по данной стрелке (см. рис. 2.11). Такой граф состояний называют *размеченным*.

Вероятность того, что система S , находящаяся в состоянии s_i , за элементарный промежуток времени $(t, t + dt)$ перейдет в состояние s_j (элемент вероятности перехода из s_i в s_j), есть вероятность того, что за это время dt появится хотя бы одно событие потока, переводящего S из s_i в s_j . С точностью до бесконечно малых высших порядков эта вероятность равна $\lambda_{ij}dt$.

Потоком вероятности перехода из состояния s_i в s_j называется величина $\lambda_{ij} p_i(t)$ (здесь интенсивность λ_{ij} может быть как зависящей, так и независимой от времени).

Рассмотрим случай, когда система S имеет конечное число состояний s_1, s_2, \dots, s_n . Для описания случайного процесса, протекающего в этой системе, применяются вероятности состояний

$$p_1(t); p_2(t); \dots; p_n(t), \quad (2.16)$$

где $p_i(t)$ – вероятность того, что система S в момент t находится в состоянии S_i :

$$p_i(t) = P \{S(t) = s_i\}. \quad (2.17)$$

Очевидно, для любого t

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1. \quad (2.18)$$

Для нахождения вероятностей (2.16) нужно решить систему дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), имеющих вид

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или, опуская аргумент t у переменных p_t ,

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} p_j - p_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.19)$$

Напомним, что интенсивности потоков λ_{ij} могут зависеть от времени t (аргумент t для краткости написания опущен).

Уравнения (2.19) удобно составлять, пользуясь размеченным графом состояний системы и следующим мнемоническим правилом: производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие. Например, для системы S размеченный граф состояний, которой дан на рис. 2.11, система уравнений Колмогорова имеет вид

$$\begin{aligned} dp_1 / dt &= \lambda_{31} p_3 + \lambda_{41} p_4 - (\lambda_{12} + \lambda_{14}) p_1; \\ dp_2 / dt &= \lambda_{12} p_1 - \lambda_{23} p_2; \\ dp_3 / dt &= \lambda_{23} p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{35}) p_3; \\ dp_4 / dt &= \lambda_{14} p_1 + \lambda_{34} p_3 + \lambda_{54} p_5 - \lambda_{41} p_4; \\ dp_5 / dt &= \lambda_{35} p_3 - \lambda_{54} p_5. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Так как для любого t выполняется условие (2.18), можно любую из ее вероятностей (2.16) выразить через остальные и таким образом уменьшить число уравнений на одно.

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений (2.20) для вероятностей состояний $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n$, нужно задать начальное распределение вероятностей

$$p_1(0), p_2(0), \dots, p_i(0), \dots, p_n(0), \quad (2.21)$$

сумма которых равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1.$$

Если, в частности, в начальный момент $t = 0$ состояние системы S в точности известно, например $S(0) = s_i$, то $p_i(0) = 1$, а остальные вероятности (2.21) равны нулю.

Во многих случаях, когда процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, возникает вопрос о предельном поведении вероятностей $p_i(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими (то есть стационарными пуассоновскими с постоянными интенсивностями λ_{ij}), в некоторых случаях существуют *финальные* (или предельные) вероятности состояний

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.22)$$

не зависящие от того, в каком состоянии система S находилась в начальный момент. Это означает, что с течением времени в системе S устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний уже не меняются. В этом предельном режиме каждая финальная вероятность может быть истолкована как среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Система, для которой существуют финальные вероятности, называется *эргодической*, и соответствующий случайный процесс — эргодическим.

Для существования финальных вероятностей состояний одного условия $\lambda_{ij} = \text{const}$ недостаточно, требуется выполнение еще некоторых условий, проверить которые можно по графу состояний, выделив на нем существенные и несущественные состояния. Состояние s_i называется *существенным*, если нет другого состояния s_j , такого, что, перейдя однажды каким-то способом из s_i в s_j , система уже не может вернуться в s_i . Все состояния, не обладающие таким свойством, называются *несущественными*.

Например, для системы S , граф состояний которой дан на рис. 2.13, состояния s_1, s_2 несущественны (из s_1 можно уйти, например, в s_2 и не вернуться, а из s_2 в s_4 или s_5 и не вернуться), а состояния s_4, s_5, s_3, s_6, s_7 — существенны (существенные состояния обведены жирными линиями).

При конечном числе состояний n для существования финальных вероятностей необходимо и достаточно, чтобы из каждого существенного состояния можно было (за какое-то число шагов) перейти в каждое другое существенное. Граф, представленный на рис. 2.13,

этому условию не удовлетворяет (например, из существенного состояния s_4 нельзя перейти в существенное состояние s_6); для графа, показанного на рис. 2.14, финальные вероятности существуют (из каждого существенного состояния возможен переход в каждое другое существенное).

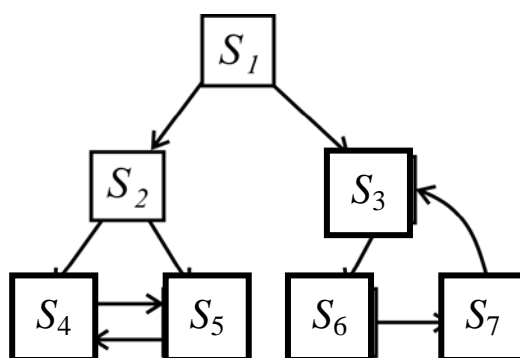


Рис. 2.13. Граф с существенными и несущественными состояниями

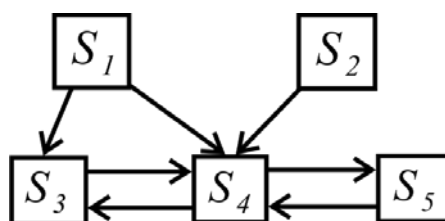


Рис. 2.14. Граф с финальными вероятностями

Несущественные состояния потому так и называются, что из каждого такого состояния система рано или поздно уйдет в какое-то из существенных и больше не вернется. Естественно, финальные вероятности для несущественных состояний равны нулю.

Если система S имеет конечное число состояний s_1, s_2, \dots, s_n , то для существования финальных вероятностей достаточно, чтобы из любого состояния системы можно было (за какое-то число шагов) перейти в любое другое. Если число состояний s_1, s_2, \dots, s_n , бесконечно, то это условие перестает быть достаточным, и существование финальных вероятностей зависит не только от графа состояний, но и от интенсивностей λ_{ij} .

Финальные вероятности состояний (если они существуют) могут быть получены решением системы линейных алгебраических уравнений; они получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если положить в них левые части (производные) равными нулю. Однако удобнее составлять эти уравнения непосредственно по графу состояний, пользуясь мнемоническим правилом: для каждого

состояния суммарный выходящий поток вероятности равен суммарному входящему. Например, для системы S , размеченный граф состояний которой дан на рис. 2.15, уравнения для финальных вероятностей состояний имеют вид

$$\begin{aligned} (\lambda_{12} + \lambda_{13}) p_1 &= \lambda_{21} p_2; & (\lambda_{21} + \lambda_{24}) p_2 &= \lambda_{12} p_1 + \lambda_{42} p_4; \\ (\lambda_{34} + \lambda_{35}) p_3 &= \lambda_{13} p_1; & \lambda_{42} p_1 &= \lambda_{24} p_2 + \lambda_{34} p_3 + \lambda_{54} p_5; & \lambda_{54} p_5 &= \lambda_{35} p_3. \end{aligned} \quad (2.23)$$

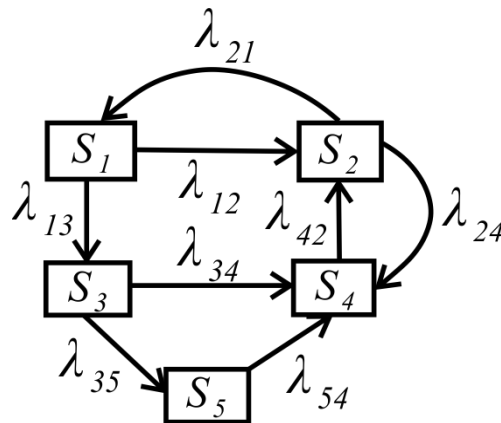


Рис. 2.15. Размеченный граф состояний

Таким образом, получается (для системы S с n состояниями) система n линейных однородных алгебраических уравнений с n неизвестными p_1, p_2, \dots, p_n . Из этой системы можно найти неизвестные p_1, p_2, \dots, p_n с точностью до произвольного множителя. Чтобы найти точные значения p_1, \dots, p_n , к уравнениям добавляют нормировочное условие $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, пользуясь которым можно выразить любую из вероятностей p_i через другие (и, соответственно, отбросить одно из уравнений).

На практике часто приходится встречаться с системами, граф состояний которых имеет вид, показанный на рис. 2.16 (все состояния можно вытянуть в цепь, причем каждое из них связано прямой и обратной связью с двумя соседними, кроме двух крайних, каждое из которых связано только с одним соседним). Схема, изображенная на рис. 2.16, называется *схемой гибели и размножения*. Это название заимствовано из биологических задач, где состояние популяции s_k означает наличие в ней k единиц. Переход вправо связан с «размножением» единиц, а влево – с их «гибелью». На рис. 2.16 «интенсивности размножения» $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ проставлены у стрелок, ведущих слева направо, «интенсивности гибели» $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ – у стрелок, ведущих справа налево. Каждая из них отмечена индексом того состояния, из которого исходит соответствующая стрелка.

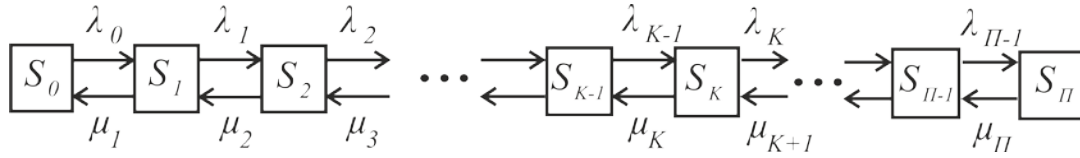


Рис. 2.16. Схема гибели и размножения

Для схемы гибели и размножения финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0; \dots;$$

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0, \quad (k = 0, \dots, n; \dots);$$

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0; \quad p_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right\}^{-1}. \quad (2.24)$$

Обратим внимание на правило вычисления любой вероятности состояния (при $k = 1, 2, \dots, n$):

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0,$$

которое можно сформулировать так: вероятность любого состояния в схеме гибели и размножения (рис. 2.16) равна дроби, в числителе которой стоит произведение всех интенсивностей размножения, стоящих левее s_k , а в знаменателе — всех интенсивностей гибели, стоящих левее s_k , умноженной на вероятность крайнего левого состояния p_0 .

Если процесс описывается схемой гибели и размножения, то можно записать дифференциальные уравнения для математического ожидания и дисперсии случайной функции $X(t)$ — числа единиц в системе в момент времени t :

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \mu_k) p_k(t); \quad (2.25)$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^n [\lambda_k + \mu_k + 2k(\lambda_k \equiv \mu_k) \equiv 2m_x(t)(\lambda_k \equiv \mu_k)] p_k(t). \quad (2.26)$$

В этих формулах нужно принять $\lambda_n = \mu_0 \equiv 0$. Интенсивности λ_k ($0 \leq k \leq n-1$) и μ_k ($1 \leq k \leq n$) могут быть любыми неотрицательными функциями времени.

При достаточно больших значениях $m_x(t)$ (> 20) и выполнении условия $0 < m_x(t) \pm 3\sqrt{D_x(t)} < n$ можно приближенно полагать, что сечение случайной функции $X(t)$ представляет собой нормальную случайную величину с параметрами $m_x(t)$, $\sqrt{D_x(t)}$, полученными решением уравнений (2.25), (2.26). Формулы (2.25) и (2.26) остаются справедливыми при $n \rightarrow \infty$, если верхний предел в суммах заменить на ∞ .

2.2.3. Размеченный граф состояний системы. Система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний

В предыдущем разделе было показано, что марковский случайный процесс возможен, когда все потоки событий, переводящие процесс из состояния в состояние, являются пуассоновскими. Пуассоновский поток событий, переводящий систему из состояния x_i в состояние x_j , характеризуется одной функцией: интенсивностью потока событий $\lambda_{i,j}(t)$, которая может быть любой неотрицательной функцией времени [16]. Таким образом, исчерпывающей характеристикой Марковского случайного процесса, имеющего $n + 1$ состояние (x_0, x_1, \dots, x_n), является квадратная матрица интенсивностей $\|\lambda(t)\|$ порядка $(n + 1, n + 1)$, элементами которой являются интенсивности пуассоновских потоков $\lambda_{i,j}(t)$, при этом $\lambda_{i,i}(t) \equiv 0$ ($i = \overline{0, n}$):

$$\|\lambda\| = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{0,1} & \dots & \lambda_{0,i} & \dots & \lambda_{0,j} & \dots & \lambda_{0,n} \\ \lambda_{1,0} & 0 & \dots & \lambda_{1,i} & \dots & \lambda_{1,j} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{i,0} & \lambda_{i,1} & & 0 & & \lambda_{i,j} & & \lambda_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{j,0} & \lambda_{j,1} & & \lambda_{j,i} & & 0 & & \lambda_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{n,0} & \lambda_{n,1} & \dots & \lambda_{n,i} & \dots & \lambda_{n,j} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Этой матрице интенсивностей $\|\lambda\|$ соответствует ориентированный граф состояний $G(X)$, в котором размер ребра, связывающего состояние x_i с состоянием x_j , равен интенсивности потока событий $\lambda_{ij}(t)$. Если интенсивность $\lambda_{ij}(t) \equiv 0$, то на графе $G(X)$ ребра, соединяющего состояние x_i с состоянием x_j , не будет. Граф $G(X)$, на котором, помимо направлений перехода, указаны и интенсивности потоков событий, будет называться размеченным графом состояний.

Каждому размеченному графу состояний соответствует система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний. Ниже изложен алгоритм решения дифференциальных уравнений, который удобен при разработке программы решения уравнений на компьютере.

На основании правила решения дифференциальных уравнений для вероятностей состояний можно записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$dp_i(t)/dt = -\sum_{j=0}^n \lambda_{i,j} p_i(t) + \sum_{j=0}^n \lambda_{j,i} p_j(t). \quad (2.28)$$

Зависимость интенсивностей потоков событий от времени для сокращения записи опущена.

Решение системы дифференциальных уравнений (2.28) – это решение известной *задачи Коши*, которое в данных условиях существует.

Для формализации правила составления и решения системы дифференциальных уравнений (2.28) введем в рассмотрение следующие матрицы:

1) матрицу-столбец $\|p(t)\|$ вероятностей состояний порядка $(n + 1, 1)$, элементы которой представляют искомые вероятности состояний марковского процесса:

$$\|p(t)\| = \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} \quad (t \geq 0); \quad (2.29)$$

2) матрицу-строку $\|\lambda_{x,i}\|$ порядка $(1, n + 1)$, элементы которой равны элементам i -го столбца матрицы интенсивности $\|\lambda\|$:

$$\|\lambda_{i,x}\| = \|\lambda_{i,0}; \lambda_{i,1}; \dots; \lambda_{j,i}; \dots; \lambda_{n,i}\|; \quad (2.30)$$

3) матрицу-строку $\|\lambda_{i,x}\|$ порядка $(1, n + 1)$, элементы которой равны элементам i -й строки матрицы интенсивностей $\|\lambda\|$:

$$\|\lambda_{i,x}\| = \|\lambda_{i,0}; \lambda_{i,1}; \dots; \lambda_{j,i}; \dots; \lambda_{i,n}\|; \quad (2.31)$$

4) матрицу-строку $\|i\|$ порядка $(1, n + 1)$, в которой все элементы равны нулю, кроме одного, равного единице и стоящего на $(i + 1)$ -м месте:

$$\|i\| = \left\| \underbrace{0, 0, \dots, 0, 1}_i \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1} \right\| \quad (i = \overline{0, n}); \quad (2.32)$$

5) единичную матрицу-столбец $\|E\|$ порядка $(n + 1, 1)$:

$$\|E\| = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.33)$$

Обозначим произведение матрицы $\|A\|$ справа на матрицу $\|B\|$:

$$\|A\| \times \|B\|, \quad (2.34)$$

а произведение матрицы $\|A\|$ на скаляр α : $\alpha \|A\|$. Тогда систему уравнений (2.28) можно записать следующим образом:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -[\|i\| \times \|p(t)\|] [\|\lambda_{i,x}\| \times \|E\|] + \|\lambda_{x,i}\| \times \|p(t)\| \quad (i = \overline{0, n}). \quad (2.35)$$

Система уравнений (2.35) интегрируется при начальных условиях, заданных матрицей-столбцом начальных условий:

$$\|p(0)\|, \quad (2.36)$$

элементы которой удовлетворяют двум условиям:

$$\|i\| \times \|p(0)\| = p_i(0) \geq 0, \quad (2.37)$$

$$\|p(0)\| \times \|E\| = 1. \quad (2.38)$$

Условие (2.38) называется *нормировочным*.

Для любого конечного числа состояний $n + 1$ решение системы уравнений (2.35) для любого момента времени t при начальных условиях (2.36) удовлетворяет двум условиям:

$$\|i\| \times \|p(t)\| = p_i(t) \geq 0, \quad (2.39)$$

$$\|p(t)\| \times \|E\| = 1. \quad (2.40)$$

Таким образом, для составления и решения системы дифференциальных уравнений (2.32) нужно иметь квадратную матрицу интенсивностей $\|\lambda\|$ (2.31) и матрицу-столбец начальных условий $\|p(0)\|$ (2.36).

Обозначим $T_{i,x}$ такое преобразование, которое ставит в соответствие каждой квадратной матрице $\|\lambda\|$ матрицу-строку, элементы которой равны элементам i -й строки матрицы $\|\lambda\|$:

$$T_{i,x} \|\lambda\| \times \|\lambda_{i,x}\|, \quad (2.41)$$

а $T_{i,x}$ – такое преобразование, которое ставит в соответствие каждой квадратной матрице $\|\lambda\|$ матрицу-строку, элементы которой равны элементам i -го столбца матрицы $\|\lambda\|$:

$$T_{x,i} \|\lambda\| \times \|\lambda_{x,i}\|. \quad (2.42)$$

Тогда алгоритм составления и решения дифференциальных уравнений марковского процесса может быть следующий:

1) составляется квадратная матрица интенсивностей $\|\lambda\|$ (2.43), то есть либо дается набор $(n + 1) \times n$ функций, либо указывается алгоритм получения этих функций; матрица $\|\lambda\|$ вводится в программу;

2) составляется и вводится в программу матрица-столбец начальных условий $\|p(0)\|$;

3) составляются алгоритм и программа преобразования $T_{i,x}$;

4) составляются алгоритм и программа преобразования T_{xi} ;

5) вводится в программу матрица-строки $\|i\|$;

6) вводится в программу матрица-столбец $\|E\|$;

7) запускается программа умножения матрицы-строки порядка $(1, n + 1)$ справа на матрицу-столбец порядка $(n + 1, 1)$;

8) производится умножение матриц:

$$\|i\| \times \|p(t)\| = p_i(t); \quad (2.44)$$

9) определяется матрица $\|\lambda_{i,x}\|$:

$$\|\lambda_{i,x}\| = T_{i,x} \|\lambda\|; \quad (2.45)$$

10) производится умножение матриц:

$$\|\lambda_{i,x}\| \times \|E\| = \sum_{i=0}^n \lambda_{i,j} = \lambda_i; \quad (2.46)$$

11) производится умножение скаляров и результат умножается на минус 1:

$$-p_i(t)\lambda_i; \quad (2.47)$$

12) определяется матрица $\|\lambda_{x,i}\|$:

$$\|\lambda_{x,i}\| = T_{x,i} \|\lambda\|; \quad (2.48)$$

13) производится умножение матриц:

$$\|\lambda_{x,i}\| \times \|p(t)\|; \quad (2.49)$$

14) запускается программа решения системы дифференциальных уравнений:

$$dp_i(t)/dt = -p_i(t)\lambda_i + \|\lambda_{x,i}\| \times \|p(t)\|, \quad (i = 0, n) \quad (2.50)$$

При решении системы дифференциальных уравнений (2.50) иногда нужно задавать шаг интегрирования. Шаг интегрирования зависит от величины коэффициентов, стоящих при переменных, которые отыскиваются, то есть зависят от интенсивностей потоков событий $\lambda_{i,j}(t)$. Опыт решения подобных задач показывает, что переменный шаг интегрирования $h(t+1)$ можно найти из следующих условий:

$$h(t+1) = 1/3p_i^{(m)}(t), \quad (t = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.51)$$

где

$$p_i^{(m)}(t) = dp_i^{(m)}(t)/dt = \max_{0 \leq i \leq n} [dp_i(t)/dt]. \quad (2.52)$$

Выбор шага интегрирования по формулам (2.51) и (2.52) обеспечивает приемлемую точность и меньшее время для решения задачи.

2.3. Некоторые простейшие модели теории массового обслуживания

Если все потоки событий простейшие, то процесс, протекающий в СМО, представляет собой марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. При выполнении некоторых условий для этого процесса существует финальный стационарный режим, при котором вероятности состояний и другие характеристики процесса не зависят от времени.

Задачи ТМО – нахождение вероятностей различных состояний СМО, а также установление зависимости между заданными параметрами (числом каналов n , интенсивностью потока заявок λ , распределением времени обслуживания и т. д.) и характеристиками эффективности работы СМО. В качестве таких характеристик могут рассматриваться следующие [17]:

- среднее число заявок A , обслуживаемое СМО в единицу времени, или абсолютная пропускная способность СМО;
- вероятность обслуживания поступившей заявки Q или относительная пропускная способность СМО; $Q = A/\lambda$;
- вероятность отказа $P_{отк}$, то есть вероятность того, что поступившая заявка не будет обслужена, получит отказ; $P_{отк} = 1 - Q$;
- среднее число заявок в СМО (обслуживаемых или ожидающих в очереди) \bar{z} ;
- среднее число заявок в очереди \bar{r} ;

- среднее время пребывания заявки в СМО (в очереди или под обслуживанием) $\bar{t}_{сист}$;
- среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{оч}$;
- среднее число занятых каналов \bar{k} .

В общем случае все эти характеристики зависят от времени. Но многие СМО работают в неизменных условиях достаточно долгое время, и поэтому для них успевает установиться режим, близкий к стационарному. Далее, не поясняя это специально, будем вычислять финальные вероятности состояний и финальные характеристики эффективности СМО, относящиеся к предельному, стационарному режиму ее работы.

Для любой открытой СМО в предельном стационарном режиме среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$ выражается через среднее число заявок в системе с помощью формулы Литтла:

$$\bar{t}_{сист} = \bar{z} / \lambda, \quad (2.53)$$

где λ – интенсивность потока заявок.

Аналогичная формула (называемая также формулой Литтла) связывает среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{оч}$ и среднее число \bar{r} заявок в очереди:

$$\bar{t}_{оч} = \bar{r} / \lambda. \quad (2.54)$$

Формулы Литтла полезны в работе, так как позволяют вычислять не обе характеристики эффективности (среднее время пребывания и среднее число заявок), а любую из них.

Характерно, что формулы (2.53) и (2.54) справедливы для любой открытой СМО (одноканальной, многоканальной, при любых видах потоков заявок и обслуживании). Единственное требование к потокам заявок и их обслуживанию – чтобы они были стационарными.

Аналогично универсальное значение для открытых СМО имеет формула, выражающая среднее число занятых каналов \bar{r} через абсолютную пропускную способность A :

$$\bar{r} = A / \mu, \quad (2.55)$$

где $\mu = 1 / \bar{t}_{обсл}$ – интенсивность потока обслуживания.

Многие задачи теории массового обслуживания, касающиеся простейших СМО, решаются по схеме гибели и размножения.

Если граф состояний СМО может быть представлен в виде, показанном на рис. 2.17, то финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right\}^{-1}; \quad (2.56)$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0; \quad \dots; \quad p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0 \quad (0 \leq k \leq n); \quad \dots; \quad p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0. \quad (2.57)$$

При выводе формул для среднего числа заявок (в очереди или в системе) широко применяется прием дифференцирования рядов, состоящий в следующем.

Если $x < 1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^k = x \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} x^k = x \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-x^2},$$

и окончательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{1-x^2}; \quad (2.58)$$

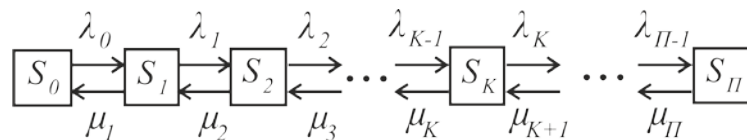


Рис. 2.17. Схема графа состояний СМО

Ниже приводится ряд формул, выражающих финальные вероятности состояний и характеристики эффективности для часто встречающихся типов СМО. *Простейшей СМО* называется СМО, в которой все потоки простейшие.

2.3.1. Простейшая СМО с отказами (задача Эрланга)

На n -канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ , время обслуживания показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл.}}$. Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО (в силу отсутствия очереди, оно совпадает с числом занятых каналов):

s_0 — СМО свободна;

s_1 — занят один канал, остальные свободны;

s_k – занято k каналов, остальные свободны ($1 \leq k \leq n$); ...;

s_n – заняты все n каналов.

Финальные вероятности состояний выражаются формулами Эрланга:

$$p = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right\}^{-1}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.59)$$

где $\rho = \lambda/\mu$.

Характеристики эффективности следующие:

$$A = \lambda(1 - p_n); \quad Q = 1 - p_n; \quad P_{отк} = p_n; \quad \bar{k} = \rho(1 - p_n). \quad (2.60)$$

При больших значениях n вероятности состояний (2.58) удобно вычислять через табулированные функции:

$$P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (\text{распределение Пуассона}) \quad (2.61)$$

и

$$R(m, a) = \sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (2.62)$$

(см. прил. 1 и 2), из которых первую можно выразить через вторую:

$$P(m, a) = R(m, a) - R(m-1, a). \quad (2.63)$$

Пользуясь этими функциями, формулы Эрланга (11.0.6) можно переписать в виде

$$p_k = P(k, \rho)/R(n, \rho), \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (2.64)$$

2.3.2. Простейшая одноканальная СМО с неограниченной очередью

На одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$. Длина очереди не ограничена. Финальные вероятности существуют только при $\rho = \lambda/\mu < 1$ (при $\rho \geq 1$). Очередь растет неограниченно. Состояния СМО нумеруются по числу заявок в СМО, находящихся в очереди или обслуживаемых:

s_0 – СМО свободна;

s_1 – канал занят, очереди нет;

s_2 – канал занят, одна заявка стоит в очереди;

s_k – канал занят, $(k-1)$ заявок стоят в очереди.

Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p = 1 - \rho; \quad p_k = \rho^k (1 - \rho), \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.65)$$

где $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda; \quad Q = 1; \quad P_{отк} = 0; \quad (2.66)$$

$$\bar{z} = \frac{\rho}{1-\rho}; \quad \bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}; \quad \bar{t}_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}; \quad \bar{t}_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \quad (2.67)$$

Среднее число занятых каналов (или вероятность того, что канал занят)

$$\bar{k} = \lambda / \mu = 0. \quad (2.68)$$

2.3.3. Простейшая одноканальная СМО с ограничением по длине очереди

На одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ ; время обслуживания – показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$. В очереди m мест. Если заявка приходит в момент, когда все эти места заняты, она получает отказ и покидает СМО.

Состояния СМО:

s_0 – СМО свободна;

s_1 – канал занят, очереди нет;

s_2 – канал занят, одна заявка стоит в очереди; ...;

s_k – канал занят, $k - 1$ заявок стоят в очереди; ...;

s_{m+1} – канал занят, m заявок стоят в очереди.

Финальные вероятности состояний существуют при любом $\rho = \lambda/\mu$ и равны:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}; \quad p_k = \rho^k p_0, \quad (k = 1, \dots, m+1). \quad (2.69)$$

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda (1 - p_{m+1}); \quad Q = 1 - p_{m+1}; \quad P_{отк} = p_{m+1}.$$

Среднее число занятых каналов (вероятность того, что канал занят)

$$\bar{k} = 1 - p_0. \quad (2.70)$$

Среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 [1 - \rho^m (m+1 - m\rho)]}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)}. \quad (2.71)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}. \quad (2.72)$$

По формуле Литтла

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda. \quad (2.73)$$

2.3.4. Простейшая многоканальная СМО с неограниченной очередью

На n -канальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ ; время обслуживания одной заявки – показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл}}$. Финальные вероятности существуют только при $\rho/n = x < 1$, где $\rho = \lambda/\mu$. Состояния СМО нумеруются по числу заявок в СМО:

$$\left. \begin{array}{l} s_0 - \text{СМО свободна;} \\ s_1 - \text{занят один канал, ...;} \\ s_k - \text{занято } k \text{ каналов } (1 \leq k \leq n); \dots; \\ s_{n+1} - \text{заняты все } n \text{ каналов, одна заявка стоит в очереди; ...;} \\ s_{n+r} - \text{заняты все } n \text{ каналов, } r \text{ заявок стоят в очереди; ...} \end{array} \right\} \text{ очереди нет}$$

Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1}{1-x} \right\}^{-1};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (1 \leq k \leq n); \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \quad (r \geq 1). \quad (2.74)$$

С помощью функций $P(m, a)$ и $R(m, a)$ формулы (2.74) могут быть приведены к виду

$$p_k = \frac{P(k, \rho)}{R(n, \rho) + P(n, \rho)/(1-x)}, \quad (k = 0, \dots, n),$$

$$p_{n+r} = x_r p_n, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.75)$$

Характеристики эффективности СМО:

$$r = \rho^{n+1} \rho_0 / [n \cdot n! (1-x)^2] = x p_n / (1-x)^2, \quad (2.76)$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} = \bar{r} + \rho, \quad (2.77)$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda. \quad (2.78)$$

2.3.5. Простейшая многоканальная СМО с ограничением по длине очереди

Условия и нумерация состояний те же, что в п. 2.3.4, с той разницей, что число m мест в очереди ограничено. Финальные вероятности состояний существуют при любых λ и μ и выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1}{1-x} \right\}^{-1};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (1 \leq k \leq n);$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \quad (1 \leq r \leq m), \quad (2.79)$$

где $x = \rho/n = \lambda/(n\mu)$.

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda (1 - p_{n+m}); \quad Q = 1 - p_{n+m}; \quad P_{отк} = p_{n+m}; \quad \bar{k} = \rho(1 - p_{n+m}); \quad (2.80)$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \frac{1 - (m+1)x^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2}; \quad (2.81)$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}; \quad (2.82)$$

$$\bar{t}_{оч} = \bar{r} / \lambda; \quad \bar{t}_{сист} = \bar{z} / \lambda. \quad (2.83)$$

2.3.6. Многоканальная СМО с отказами при простейшем потоке заявок и произвольном времени обслуживания

Формулы Эрланга (2.58) остаются справедливыми и тогда, когда поток заявок простейший, а время обслуживания $T_{обсл}$ имеет произвольное распределение с математическим ожиданием $\bar{t}_{обсл} = 1/\mu$.

2.3.7. Одноканальная СМО с неограниченной очередью при простейшем потоке заявок и произвольном времени обслуживания

Если на одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ , а время обслуживания $T'_{обсл}$ распределяется по произвольному закону с математическим ожиданием $1/\mu$

и коэффициентом вариации v_μ , то среднее число заявок в очереди выражается формулой Полячека – Хинчина:

$$\bar{r} = \rho^2 (1 + v_\mu)^2 / [2(1 - \rho)], \quad (2.84)$$

где $\rho = \lambda/\mu$, а среднее число заявок в СМО

$$\bar{z} = \{ \rho^2 (1 + v_\mu)^2 / [2(1 - \rho)] \} + \rho. \quad (2.85)$$

Из (2.84) и (2.85) по формуле Литтла получим

$$\bar{t}_{оч} = \frac{\rho^2 (1 + v_\mu)^2}{2\lambda(1 - \rho)}; \quad \bar{t}_{сум} = \frac{\rho^2 (1 + v_\mu^2)^2}{2\lambda(1 - \rho)} + \frac{1}{\mu}. \quad (2.86)$$

2.3.8. Одноканальная СМО при произвольном потоке заявок и произвольном времени обслуживания

Точных формул для этого случая не существует, приближенная оценка длины очереди может быть сделана по формуле

$$\bar{r} \approx \rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2(1 - \rho)], \quad (2.87)$$

где v – коэффициент вариации интервала между событиями во входном потоке;

$\rho = \lambda/\mu$;

λ – величина, обратная математическому ожиданию этого интервала);

$\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$ – величина, обратная среднему времени обслуживания;

v – коэффициент вариации времени обслуживания.

Среднее число заявок, связанных о СМО,

$$\bar{z} = \{ \rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2(1 - \rho)] \} + \rho, \quad (2.88)$$

а значения среднего времени пребывания заявки в очереди и в СМО равны, соответственно:

$$\bar{t}_{оч} \approx \rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2\lambda(1 - \rho)]; \quad (2.89)$$

$$\bar{t}_{сум} \approx \{ \rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2\lambda(1 - \rho)] \} + 1/\mu. \quad (2.90)$$

2.3.9. Простейшая многофазовая СМО с очередью

Анализ многофазовых СМО в общем случае затруднен тем, что входящий поток каждой последующей фазы является выходным потоком предыдущей и в общем случае имеет последствие. Однако если на вход СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок, а время обслуживания показательное, то выходной поток этой СМО – простейший, с той же интенсивностью λ , что и входящий. Из этого следует, что многофазовую СМО с неограниченной очередью перед каждой фазой, простейшим входящим потоком заявок и показательным временем обслуживания на каждой фазе можно анализировать как простую последовательность простейших СМО.

Если очередь к фазе ограничена, то выходной поток этой фазы перестает быть простейшим и вышеуказанный прием может применяться только в качестве приближенного.

2.4. Классификация систем массового обслуживания для лесопромышленного производства.

Характеристики потоков древесины и времени обработки

В лесной отрасли на основе анализа процедурных, физических и функциональных моделей разработаны классификации, характеризующие основные свойства систем обслуживания на лесосечных, лесоскладских работах и в лесообрабатывающих цехах. Классификации учитывали возможности аналитического анализа ТМО.

В табл. 2.1 приведена характеристика основных систем обслуживания лесопромышленного предприятия [18]. В качестве СМО можно представить и работу отдельных механизмов и станков. Как указывалось выше (разд. 1.1) объединение элементов в систему или, наоборот, разделение системы на элементы относительно и зависит от задач исследования. Для решения задач ТМО разделения сложной системы на подсистемы и элементы их составляющие позволяют поэтапно исследовать всю сложную систему. Это несколько снижает точность расчета количества рабочих в реальном процессе, но практически дает удовлетворительные результаты.

На рис. 2.18 приведена классификация систем обслуживания на примере нижнего лесного склада, а в табл. 2.2 характеристики потоков древесины и времени обработки.

В прил. 1 изложен дополнительный материал по характеристике входных потоков и времени их обслуживания для некоторых технологических и транспортных операций.

Таблица 2.1

**Основные системы массового обслуживания
на лесопромышленных предприятиях**

Операция	Входящий поток требований	Система	Обслуживающее устройство (канал)	Обслуживание
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
Валка деревьев	Поток растущих деревьев: ординарный дискретный; требования неоднородные, интервалы поступления (разрывы между деревьями) случайные; нестационарный с последствием	С ожиданием; накопитель – лесосека практически неограниченного объема	Рабочий с бензиномоторной пилой, один или несколько каналов обслуживания	Продолжительность – случайная величина; с ограничением по числу одновременно поваленных деревьев; в порядке поступления требований
Трелевка деревьев	Поток пачек из деревьев; ординарный дискретный; требования неоднородные (разных объемов); нестационарный	С ограничением; накопитель емкостью, равной объему трелюемой пачки	Трелевочный трактор	Продолжительность – случайная величина; с ограничением по объему пачки; в порядке поступления требований; многофазное обслуживание
Погрузка леса на лесовозные автомобили	Поток лесовозных автомобилей: ординарный дискретный; требования однородные; интервалы поступления случайные; нестационарные, без последствия	С ожиданием; накопитель – лесовозный ус; замкнутая	Челюстной тракторный погрузчик	Продолжительность обслуживания – случайная величина; в порядке поступления требований
Разгрузка лесовозных автомобилей	Поток автомобилей с лесом: дискретный ординарный; требования однородные; интервалы поступления случайные; нестационарный, без последствия	С ожиданием; накопитель – лесовозная дорога; один или несколько каналов обслуживания; замкнутая	Козловой кран	Продолжительность обслуживания – случайная величина; в порядке поступления требований
Обрезка сучьев	Поток деревьев: дискретный ординарный; требования неоднородные; интервалы поступления случайные; стационарный	С ожиданием; емкость накопителя – запас деревьев под краном; один канал; разомкнутая	Сучкорезная линия типа ПСЛ	Продолжительность обслуживания – случайная величина; в порядке поступления требований; многофазное обслуживание

Продолжение табл. 2.1

1	2	3	4	5
Дробление древесных отходов лесозаготовок	Поток ветвей, сучьев, вершинок: непрерывный; нестационарный	С ограничением; накопитель – подающий транспортер ограниченной емкости	Рубильная машина	Время непрерывной работы и продолжительность простоев – случайные величины
Раскряжевка хлыстов	Поток хлыстов: дискретный ординарный (как правило); требования неоднородные; интервалы поступления случайные; стационарный	С ограничением; накопитель – площадка растаскивателей хлыстов емкостью 8–10 хлыстов	Раскряжевочная линия типа ПЛХ	Продолжительность обслуживания – случайная величина; в порядке поступления требований; многофазное обслуживание
Сортировка круглых лесоматериалов	Поток бревен: дискретный групповой, требования неоднородные; интервалы поступления случайные	С ограничением; накопитель – поперечный транспортер ограниченной емкости	Продольный сортировочный транспортер с дистанционным управлением и сбрасывателями бревен	Продолжительность обслуживания группы требований – случайная величина; в порядке размещения карманов-накопителей вдоль транспортера
Разделка низкокачественных лесоматериалов (дровяных)	Поток дровяных бревен: дискретный ординарный; требования неоднородные; интервалы поступления случайные	С ожиданием; емкость накопителя – запас сырья под краном; разомкнутая	Линия типа ЛД-2	Продолжительность обслуживания – случайная величина; в порядке поступления требований многофазное обслуживание
Пакетирование коротья (вручную)	Поток коротья: дискретный ординарный; требования неоднородные; интервалы поступления случайные	С ограничением; накопитель – ленточный транспортер ограниченной емкости	Рабочий-укладчик; один или несколько каналов	Продолжительность обслуживания – случайная величина; приоритет по группам; внутри групп – в порядке поступления требований
Штабелевка круглых лесоматериалов	Поток пачек (пакетов): дискретный ординарный, требования неоднородные; интервалы поступления случайные с последствием	С ограничением; накопитель – карманы-накопители сортировочного транспортера	Консольно-козловой кран; один или несколько каналов	Продолжительность обслуживания – случайная величина; в порядке поступления требований; многофазное обслуживание

Окончание табл. 2.1

1	2	3	4	5
Погрузка щепы	Поток щеповозов: дискретный ординарный; требования однородные; интервалы поступления случайные; стационарный	С ожиданием; накопитель – автодорога	Пневмопогрузчик	Продолжительность обслуживания – случайная величина; в порядке поступления требований
Выпиловка шпал	Поток бревен: дискретный ординарный; требования неоднородные; интервалы поступления случайные; стационарный	С ожиданием; емкость накопителя – запас сырья под краном	Шпалорезный станок	Продолжительность обслуживания – случайная величина; в порядке поступления требований; многофазное обслуживание
Оправка (окорка) шпал	Поток шпал: дискретный ординарный; требования неоднородные; интервалы поступления случайные	С ограничением; накопитель – поперечный транспортер	Шпалоправочный станок	Продолжительность обслуживания – случайная величина; в порядке поступления требований
Пакетирование шпалопродукции	Поток шпал, горбылей, досок дискретный ординарный; требования неоднородные; интервалы поступления случайные	С ограничением; накопитель – ленточный транспортер ограниченной емкости	Рабочий-укладчик; один или несколько каналов	Продолжительность обслуживания – случайная величина; приоритет по виду шпалопродукции, внутри вида – в порядке поступления требований
Погрузка лесопроductии в вагоны МПС	Поток вагонов: дискретный групповой; требования однородные (как правило); стационарный (как правило)	С ограничением; накопитель – отгрузочный тупик	Консольно-козловой кран, один или несколько каналов	Продолжительность обслуживания – случайная величина
Уборка неиспользуемых отходов и мусора	Поток отходов и мусора непрерывный; требования однородные; стационарный	С ограничением; накопитель – бункеры для отходов	Самосвал; один или несколько каналов	Продолжительность обслуживания – случайная величина

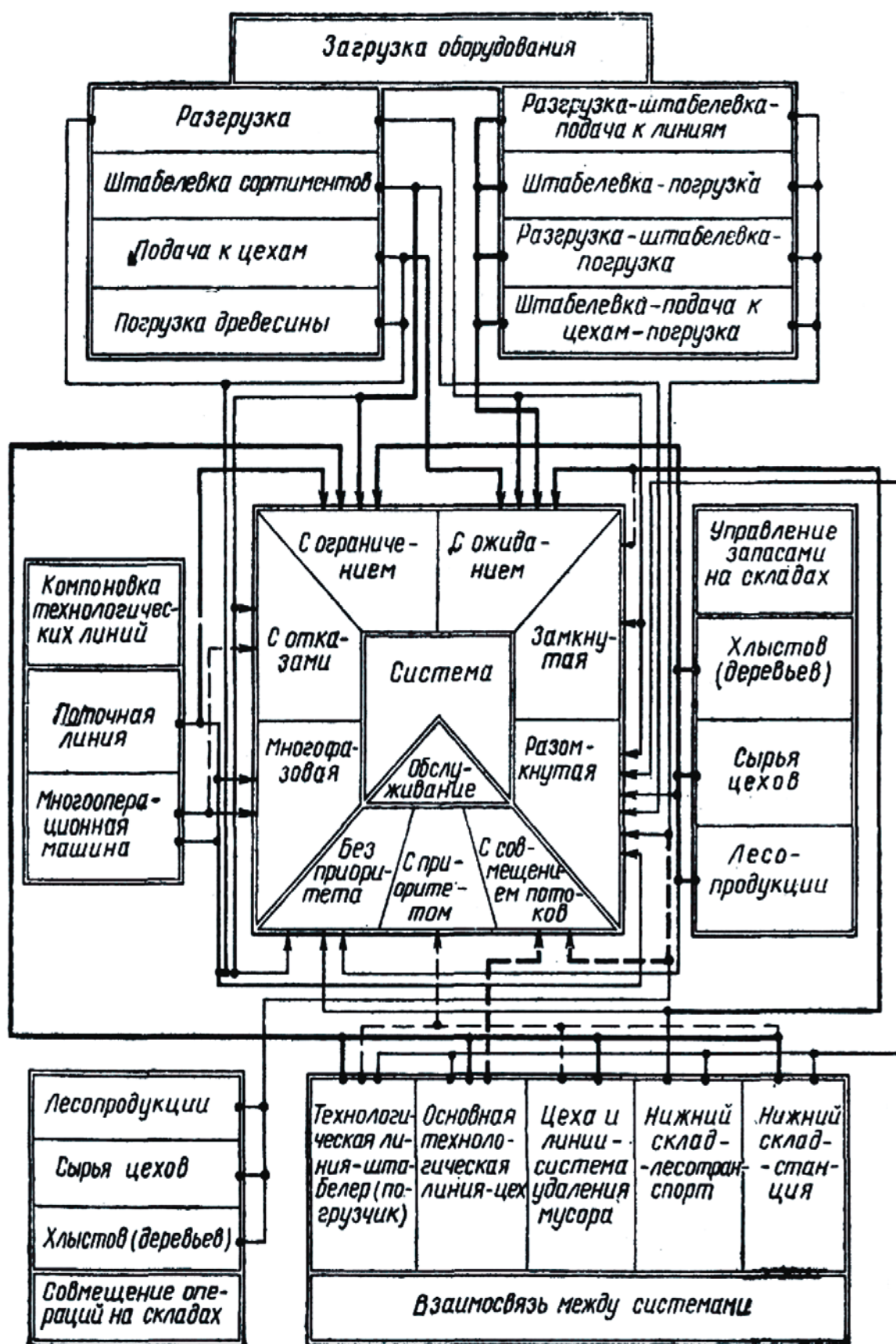


Рис. 2.18. Классификация систем обслуживания, свойственных нижним лесным складам [9]

Таблица 2.2

**Характеристики потоков древесины и времени обработки
для операций на нижних лесных складах [19]**

Операция и обозначение потока	Свойства потоков	Закон распре- деления и его параметры	Граничные условия достоверности показателей потоков
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
Входящие и выходящие потоки			
Поступление трелевоч- ных машин на погрузоч- ный пункт z , пачек	О, НС, БП	Пуассона, z	Закон действителен при одновременной работе нескольких машин
Поступление порожних лесовозных автомашин r_x , шт.	Простейший	Пуассона, r	Справедливо для крупных лесосек
Поступление груженых лесовозных машин r_x , шт.	Простейший	Пуассона, r	Стационарность действительна для определенных периодов
Поступление груженых сцепов УЖД τ_x , шт.	Г, С, БП	Пуассона, r	–
Выход сортиментов при раскряжевке V_x , м ³	Н, С, БП	Гаусса, V и σ_{px}^2	$\sigma_p = 0,766V^{0,840}$; $20 \text{ м}^3 < V < 4600 \text{ м}^3$. При $V < 20 \text{ м}^3$ – усеченное нормальное распределение
Выход сортиментов при раскряжевке V_x/q_n , пачек	О, С, П	Пуассона, V/q_n	$q_n = 0,585 V^{0,680}$. При $K_0 \gg 1$, поток простейший
Выход сортиментов при раскряжевке n_x , хлыстов или бревен	О, С, П	Гаусса, n_x и σ_{px}^2	$\bar{n}_x \gg 1$, $\sigma_{px} = \frac{\sigma_p}{q_{хл}}$
Поступление бревен по сортировочному транспортёру $n_{бр}$, шт.	О, С, П	Пуассона, $n_{бр}$	Для групп сортимента из одного хлыста
Поступление древесины в цех U_z , м ³	Н, С, БП	Гаусса, U_u , σ_u^2	$\sigma_u = 0,422 U_u^{0,974}$; $20 \text{ м}^3 < U_u < 200 \text{ м}^3$. При $U_u < 20 \text{ м}^3$ – усеченное нормальное распределение
Поступление древесины в цех U_z/q_n , пачек	О, С, П	Пуассона	$q_n = 0,178 U_u^{0,948}$
Погрузка древесины: в вагоны m_x , вагонов; на автомашины m_x , автомашин	Г, С, БП Простейший	Пуассона Пуассона, m_a	$0,2 < m < 20$ вагонов Последствие отсутствует при $m_a \gg 1$

Окончание табл. 2.2

1	2	3	4
Поступление древесины в отходы: от основных линий $\theta_V, \text{м}^3$	Н, НС	Гаусса, $\theta_V = V\Delta_{omx};$ $\sigma_V = \sigma_p \Delta_{omx}$	Для длительных интервалов (час, смена) поток стационарный $20\Delta_{omx} < \theta_U < 4600\Delta_{omx}$ То же самое
от цеха θ_U	Н, НС	Гаусса, $\theta_U = U_{\text{ц}}\Delta_{omx}$	
по всему нижнему лесоскладу, $\theta_{\text{ц}}$, автомашин	Простейший	Пуассона, $\theta_{omx}/q_{\text{в}}$	При числе бункеров более 5...7
Выход лесопроductии цехов; $U_{np}, \text{м}^3$	Н, С	Гаусса, $U_{np} = U_{\text{ц}}\Delta_{np};$ $\sigma_{np} = \sigma_{\text{ц}}\Delta_{np}$	$20\Delta_{np} < U_{np} < 200\Delta_{np}$
U_{np}/q_{np} , пачек (пакетов)	О, С, П	Пуассона, $U_{np}/q_{np}; \frac{\sigma_{\text{ц}}\Delta_{np}}{q_{np}}$	$q_{np} = q_n\Delta_{np}$
Поломки машин n_z , шт.	Простейший	Пуассона	—
Время обслуживания			
Рабочий цикл: подъемно-транспортных машин t	БП, С,	Эрланга, $K = 8, t_{nm}$	—
лесосечных и лесообрабатывающих машин t	БП, С,	Эрланга, $K = 8, t_{obr}$	—
Элементы рабочего цикла машин t_x	БП, С	Эрланга, $K \leq 20, t_i$	—
Непрерывная работа машин t_{δ}	БП, С	Экспоненциальный, t_{δ}	—
Устранение неисправности в машине t_{np}	БП, С	Экспоненциальный, t_n	—
Интервалы времени между последовательными заготовками t_y	П, С	Композиция законов Эрланга и экспоненциального, \bar{t}_y и σ_y^2	$\sigma_n^2 > \sigma_y^2 > \sigma_{obr}^2$
Накопление пачки сортирента или обработки группы хлыстов t_{px}	П, С	Экспоненциальный, μ_p	$V = \mu_p t_{px} > 20 \text{ м}^3:$ $q_p = 0,585 V^{0,680}$
Интервалы времени между заштабелеванными или погруженными пачками (пакетами) t_y	П, С	Композиция законов Эрланга и экспоненциального, \bar{t}_y и σ_y^2	$\sigma_n^2 > \sigma_y^2 > \sigma_{n.m}^2$
Интервалы времени между лесовозными автомашинами t	БП, С	Экспоненциальный, $1/r$	

Примечание. Обозначения показателей потоков: Г – групповой, С – стационарный, БП – без последствия, О – ординарный, Н – непрерывный, П – с последствием, НС – нестационарный.

2.5. Технологические схемы, графы состояний и системы дифференциальных уравнений для определения межоперационных запасов лесоматериалов в лесопромышленном производстве. Производительность механизмов

Исследования [18–21] показали, что большинство потоков лесоматериалов и отказов техники являются простейшими.

Для того чтобы описать дискретный марковский процесс с непрерывным временем, нужно знать следующие характеристики: перечень возможных состояний с указанием возможных непосредственных переходов из состояния в состояние, интенсивности всех потоков событий, под влиянием которых осуществляются эти переходы, и, в общем случае, состояние системы в начальный момент при $t = 0$.

2.5.1. Определение межоперационного запаса при работе одного механизма

Ниже рассматриваются два случая работы механизма обслуживания.

В первом случае после окончания отказа механизма обслуживания в период обработки предмета труда дообработка продолжается (рис. 2.19, в). Такая схема работы по мнению авторов [22] приемлема для таких машин как валочно-пакетирующие, сучкорезные, крановые установки имеющие значительные по продолжительности холостые ходы.

Во втором случае (рис. 2.19, г) механизм обслуживания способен возвращаться из состояния отказа в рабочее без дообработки предмета труда. К таким машинам авторы работ [22, 23] относят поштучно-сучкорезную, поштучно-раскряжовочную установки, лесотранспортеры, шпалорезные и другие станки.

Оба случая рассматриваются на примере раскряжевки хлыстов на полуавтоматической линии.

Предметы труда обрабатываются одной машиной. В соответствии с технологической схемой на рис. 2.19, а, предметы труда (хлысты) $1, 2, \dots, m$ поштучно поступают на обработку через промежутки времени t_1, t_2, \dots, t_i , имеющие случайный характер (рис. 2.19, б). Машина обрабатывает хлысты с интенсивностью обработки μ_2 , но подвержена отказам, характеризующимися интенсивностью λ_{10} при выходе из строя со свободного состояния (рис. 2.19, в), и λ_{12} при выходе из строя в процессе обработки хлыста. Соответственно интенсивности восстановления определяются величинами μ_{10} и μ_{12} .

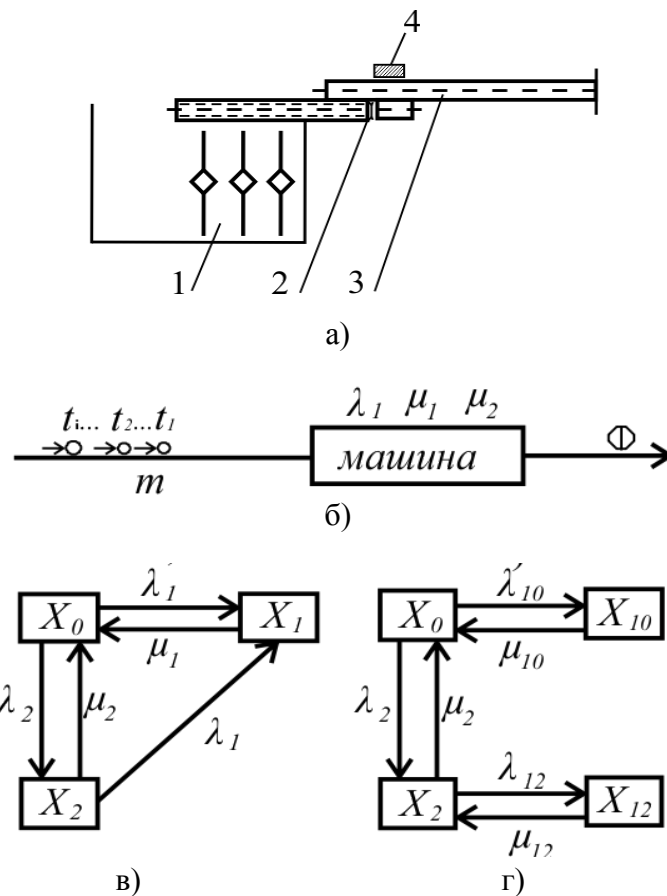


Рис. 2.19. Технологическая схема и граф состояний полуавтоматической линии для раскряжевки хлыстов: а – технологическая схема; б – схема работы; в, г – графы состояний машины; 1 – разгрузочная площадка; 2 – раскряжевочная установка; 3 – сортировочный лесотранспортер; 4 – операторская

Машина может находиться в следующих состояниях:

X_0 – машина свободна;

X_{10} – отказ машины наступил при ее свободном состоянии;

X_{12} – отказ в момент обработки;

X_2 – состояние обработки.

Согласно схеме рис. 2.19, в, функционирование машины описывается системой уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -(\lambda_{10} + \lambda_2)P_0 + \mu_{10}P_{10} + \mu_2P_2; \\ \frac{dP_{10}}{dt} = -\mu_{10}P_{10} + \lambda_{10}P_0; \\ \frac{dP_{12}}{dt} = -\mu_{12}P_{12} + \lambda_{12}P_2; \\ P_0 + P_{10} + P_{12} + P_2 = 1. \\ \frac{dP_2}{dt} = -(\lambda_{12} + \mu_2)P_2 + \lambda_2P_0 + \mu_{12}P_{12}; \end{cases}$$

В устойчивом режиме работы левые части дифференциальных уравнений равны нулю, что даёт возможность установить:

P_0 – вероятность свободного состояния машины;

P_{10} – вероятность отказа в свободном состоянии;

P_{12} – вероятность отказа в период обработки;

P_2 – вероятность обработки предметов труда.

Размер запаса предметов труда при условии максимального использования механизма

$$m = P_0 \lambda_2 T_1 = \frac{\lambda_2 T_1}{1 + \rho_{10} + \rho_{12} \rho_2 + \rho_2}, \quad (2.91)$$

где T_1 – длительность простоя механизма из-за отсутствия предметов труда, определенная с вероятностью 0,9.

$$\begin{aligned} \rho_{10} &= \frac{\lambda_{10}}{\mu_{10}} < 1; & \rho_{12} &= \frac{\lambda_{12}}{\mu_{12}} < 1; & \rho_2 &= \frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1; \\ \rho_{10} + \rho_{12} &< 1; & \rho_1 + \rho_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

С учетом надежности емкость площадки (буферного устройства) определяется как

$$m_0 = [P_0 T_1 + (P_{10} + P_{12}) T_2] \lambda_2 = \frac{[T_1 + (\rho_{10} + \rho_{12} \rho_2) T_2] \lambda_2}{1 + \rho_{10} + \rho_{12} \rho_2 + \rho_2}, \quad (2.92)$$

где T_2 – время восстановления механизма, установленное с вероятностью 0,9 при $\rho_2 \leq 0,5$ и вероятностью 0,95 при $\rho_2 > 0,5$.

При этом вероятность работы предыдущего механизма с устройством гибкой связи возрастает на величину $(P_{10} + P_{12})$, а для рассматриваемого – на величину P_0 .

Производительность системы при наличии буферного устройства возрастет на величину $\Delta\Pi$ по отношению к $\Pi_{жк}$:

$$\Delta\Pi = \lambda_2 \left[1 - \frac{\lambda_2}{(1 + \rho_{10} + \rho_{12})(\lambda_{10} + \lambda_{12} + \lambda_2 + \mu_2)} \right] T_{см}. \quad (2.93)$$

Производительность системы в случае жесткой связи определится по формуле

$$\Pi_{жк} = \frac{\lambda_2 \rho_2}{1 + \rho_{10} + \rho_{12} \rho_2 + \rho_2} = \lambda_2 P_2. \quad (2.94)$$

Пропускная способность системы с гибкой связью равна

$$\Pi_2 = \Pi_{жк} + \Delta\Pi. \quad (2.95)$$

Под предметами труда понимаются деревья, хлысты, бревна или их пачки в зависимости от конкретной рассматриваемой системы (единицы).

На рис. 2.19, г представлена схема функционирования машины, способной возвращаться из состояния отказа в рабочее без непосредственной дообработки предмета труда (второй случай).

На рисунке: X_0 – свободное состояние машины, при котором обработка не производится, X_2 – состояние машины, соответствующее процессу обработки предмета труда, X_1 – машина вышла из строя в результате отказа.

В состояние X_2 машина переходит из состояния X_0 при интенсивности поступления предметов труда λ_2 .

В состояние X_1 машина может перейти из состояния обработки изделия X_2 или из свободного состояния X_0 с интенсивностью λ_1 .

После окончания ремонтных работ, выполненных с интенсивностью восстановления μ_1 , машина окажется в свободном состоянии X_0 готовой к работе.

Система дифференциальных уравнений, описывающих процесс (рис. 2.19, г), примет вид

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_0 + \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2; \\ \frac{dP_1}{dt} = -\mu_1 P_1 + \lambda_1 P_0 + \lambda_1 P_2; \\ \frac{dP_2}{dt} = -(\lambda_1 + \mu_2)P_2 + \lambda_2 P_0, \end{cases}$$

где P_1 – вероятность отказа машины.

Здесь и в последующих схемах величины вероятностей определяются для установившегося режима работы

$$\frac{dP_0}{dt} = \frac{dP_1}{dt} = \frac{dP_2}{dt} = 0.$$

На основании рассмотренной математической модели определяются типы и рациональные размеры запасов или буферных емкостей.

Для ограниченного запаса (буферной емкости) его размер

$$m_1 = P_0 \lambda_2 T_1 = \frac{(\lambda_1 + \mu_2) \lambda_2}{(1 + \rho_1) (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)} T_1, \quad (2.96)$$

где P_0 – вероятность нахождения агрегата в свободном состоянии;

T_1 – длительность простоя агрегата из-за отсутствия предметов труда (вероятность определения не ниже 0,9).

Для максимального запаса (буферной емкости)

$$m_2 = (P_0 T_1 + P_1 T_2) \lambda_2 = \left[\frac{(\lambda_1 + \mu_2) T_1 + \rho_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) T_2}{(1 + \rho_1) (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)} \right] \lambda_2, \quad (2.97)$$

где P_1 – вероятность отказа машины;

T_2 – время восстановления работоспособности машины, определенное с вероятностью не ниже 0,9.

Размер запаса, ограниченный условиями размещения предметов труда в нем при отказе машины со временем восстановления T_2 , установленным с вероятностью 0,9

$$m_3 = \mu_2 T_2. \quad (2.98)$$

Конструктивный размер емкости устанавливается по большему значению m .

Пропускная способность системы при гибкой связи

$$\Pi_\Gamma = \Pi_{\text{ж}} + \Delta \Pi. \quad (2.99)$$

Пропускная способность с жесткой связью (при отсутствии запаса предметов труда) составит

$$\Pi_{\text{ж}} = \frac{\lambda_2^2}{(1 + \rho_1) (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)} T_{\text{см}}. \quad (2.100)$$

Величины, входящие в формулы:

ρ_1, ρ_2 – показатели загрузки системы отказами и работой, соответственно; $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$; $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$.

$T_{\text{см}}$ – продолжительность смены в мин.

Рост пропускной способности системы за счет введения гибкой связи

$$\Delta \Pi = \lambda_2 \left[1 - \frac{\lambda_2}{(1 + \rho_1) (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)} \right] T_{\text{см}}. \quad (2.101)$$

Проведенные исследования операций лесопромышленного производства показали [24]:

– детерминированные потоки не свойственны лесопромышленному производству. Случайная неравномерность работ, вероятностный характер потоков древесины являются объективной реальностью производства;

– параметры потоков, в частности, характеризующие неравномерность и закон распределения, не зависят от места, времени и производственных условий и в итоге определяются только через интенсивность потока;

– интенсивность потоков древесины планируется и может быть определена расчетным путем. Зная лишь интенсивность потока, можно заранее прогнозировать возможные значения количественных колебаний и соответствующие им вероятности как по входящим (выходящим) потокам, так и по времени обслуживания.

Ниже приведены методы и модели, разработанные в лесной отрасли для определения межоперационных запасов.

2.5.2. Определение межоперационного запаса при работе нескольких параллельно работающих механизмов

Система состоит из нескольких машин, обрабатывающих предметы труда, причем машины функционируют параллельно и выполняют одни и те же операции (рис. 2.20).

Количество машин может быть 1, 2, 3, ..., n . Примеры: вальщик, работающий на две или несколько трелевочных тракторов; козловой кран, обслуживающий несколько полуавтоматических линий для раскряжевки хлыстов.

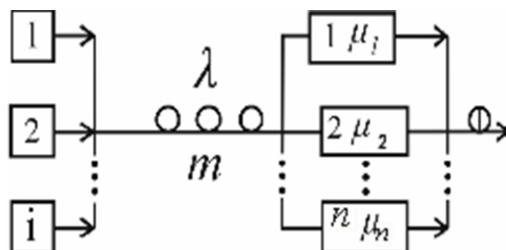


Рис. 2.20. Схема обработки бревен в случае нескольких работающих механизмов: 1, 2, ..., i – источники поступления бревен; 1, 2, ..., n – механизмы

Индивидуальные запасы перед каждой машиной определяются согласно формулам, приведенным в разд. 2.5.1.

В случае, когда машины обеспечиваются сырьем из общего запаса, его размер может быть определен как

$$M = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (2.102)$$

где m_i – запас перед одной (i -й) машиной, определяемой из формул (2.6) и (2.7).

В работе [22] приведена методика определения межоперационного запаса по номограммам. В соответствии с ней допустим, что производительность механизмов в значительном промежутке времени равна $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$;

параметры системы:

λ – интенсивность поступления бревен на обработку, шт/мин;

μ – интенсивность обработки на одном механизме, шт/мин;

n – число механизмов в системе.

Максимальный выход продукции Π_{∂}^{\max} не может превышать количества поданных в обработку бревен λ . Тогда потери производительности составят $\Delta\Pi = \lambda - \Pi_{\partial}^{\max}$, шт/мин, и размер запаса m для получения производительности Π_{∂}^{\max} будет равен, шт., [23]:

$$m = \frac{\ln \left\{ \frac{\Delta\Pi}{\lambda} \left[R_{(n,p)} + \frac{P_{(n,p)}\alpha}{1-\alpha} \right] : \left[P_{(n,p)} \left(1 + \frac{\Delta\Pi_n}{\lambda} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right] \right\}}{\ln \alpha}, \text{ шт.}$$

где α – коэффициент использования системы; $\alpha = \frac{\lambda}{n\mu}$;

$P_{(n,p)}$ – вероятность загрузки механизма;

$R_{(n,p)}$ – коэффициент распределения Пуассона; $R_{(n,p)} = \sum_{k=0}^n \frac{\rho}{k!} e^{-\rho}$

при $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Величина $R_{(n,p)}$ определяется по графику на рис. 2.21, значение $P_{(n,p)}$ по графику на рис. 2.22, объем запаса – по номограмме на рис. 2.23, в которой потери производительности приняты $\Delta\Pi_{\Pi} = 1\%$ от $\Pi_{\partial}^{\max} = \lambda$.

Для системы с жесткой связью производительность, шт/мин, определяется по формуле, приведенной в работе [23]:

$$\Pi_{\text{жс}} = \lambda \frac{R_{(n-1,\rho)}}{R_{(n,\rho)}}.$$

Рост производительности при введении гибкой связи составит

$$\Delta\Pi = \Pi_{\partial}^{\max} - \Pi_{\text{жс}}, \text{ шт/мин.}$$

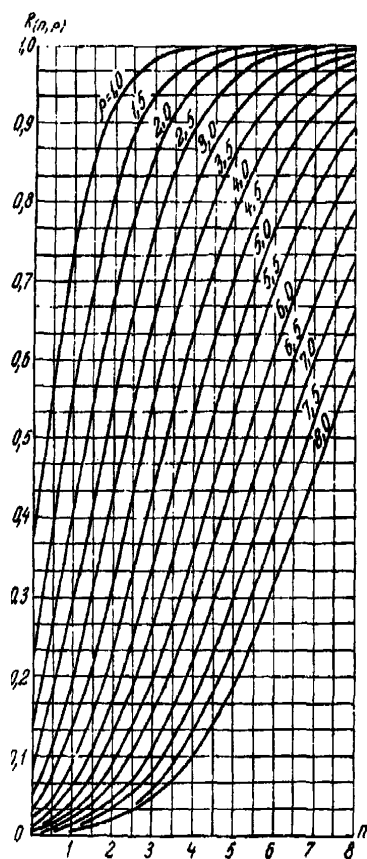


Рис. 2.21. График функции $R(n, p)$ в зависимости от количества механизмов n в потоке

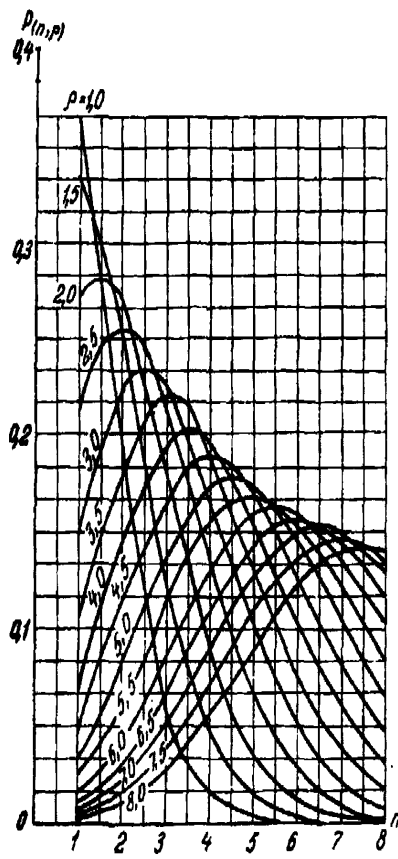


Рис. 2.22. График зависимости вероятности $P(n, p)$ от количества механизмов n в потоке

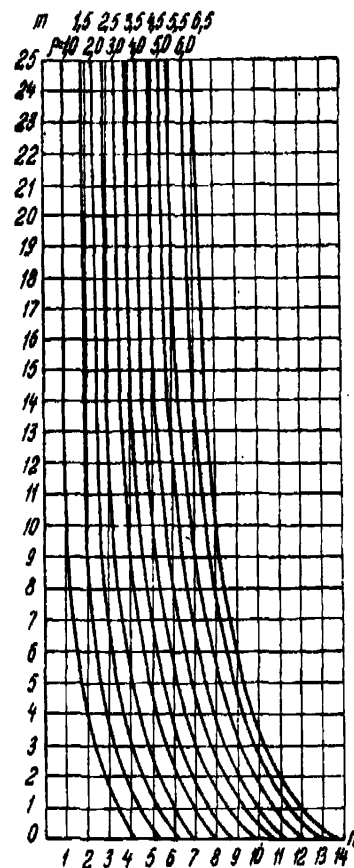


Рис. 2.23. Номограмма определения объема запаса m при нескольких обслуживающих механизмах n

2.5.3. Определение межоперационного запаса при поштучном поступлении лесоматериалов и групповой обработке одним механизмом

Обработка лесоматериалов производится одной машиной пачками. В качестве примера может служить работа крана на нижнем лесном складе (рис. 2.24).

Параметры системы следующие:

λ – интенсивность поступления предметов труда на обработку единицами, 1/мин (бревен, хлыстов, деревьев);

μ – интенсивность обработки пачки предметов труда, состоящей из m единиц, 1/мин.

Схема переходов состояний системы для определения m представлена на рис. 2.24, б.

Система уравнений, описывающих работу машины, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = \mu P_m - \lambda P_0, \\ \frac{dP_1}{dt} = \lambda(P_0 - P_1), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dP_{m-1}}{dt} = \lambda(P_{m-2} - P_{m-1}), \\ \frac{dP_m}{dt} = \lambda P_{m-1} - \mu P_m. \end{cases}$$

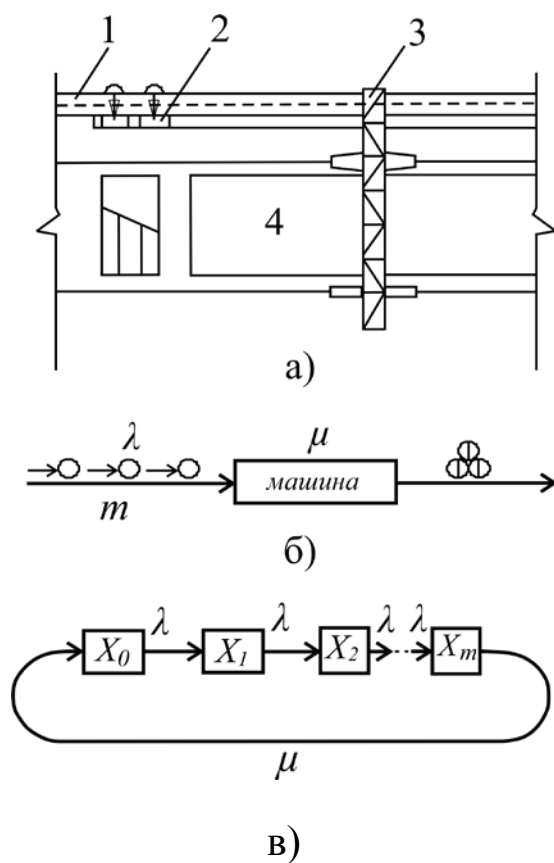


Рис. 2.24. Технологическая схема размещения консольно-козлового крана и его граф состояний: а – схема крана; б – схема обработки; в – схема интенсивности поступлений;
 1 – сортировочный лесотранспортёр; 2 – лесонакопитель;
 3 – консольно-козловой кран ККС-10; 4 – штабеля сортиментов

Оптимальный размер запаса бревен, шт., составит:

$$m = \frac{\lambda \Pi}{\mu(\lambda - \Pi)},$$

где Π – производительность системы, определенная как

$$\Pi = \frac{\Pi_{\text{ч}} K_{\text{г}}}{60}, \text{ шт/мин},$$

где $\Pi_{\text{ч}}$ – часовая производительность механизма, шт/ч;

$K_{\text{г}}$ – коэффициент технической готовности.

Численные значения интенсивности поступления и обработки бревен, шт/мин, определяются по формуле:

$$\lambda = \mu = \frac{\Pi_{\text{см}}}{q T_{\text{см}} 60},$$

где $\Pi_{\text{см}}$ – сменная производительность механизма, м³/смену;

q – объем бревна, обрабатываемого за один цикл, м³;

$T_{\text{см}}$ – продолжительность смены, ч.

Если для рассматриваемого механизма известны значения интенсивности отказов $\lambda_1 = \frac{1}{t_1}$, где t_1 – среднее время безотказной работы (между наступлением поломок), и коэффициент готовности $K_{\text{г}}$, то интенсивность восстановления, 1/мин, определится как

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1 \cdot K_{\text{г}}}{1 - K_{\text{г}}}.$$

Продолжительность ремонта, мин, с вероятностью $P = 0,9$ находим по формуле

$$T_p = 0,9 = -\frac{\ln(1 - P)}{\mu_1} = -t_{\text{рем}} \ln(1 - P),$$

где $t_{\text{рем}}$ – среднее время устранения одного отказа, мин;

P – вероятность того, что деятельность ремонта не превысит $T_p = 0,9$.

Возможно также получение необходимых данных при наблюдении за технологическим процессом.

Полученные данные обрабатываются методами статистики.

2.5.4. Определение межоперационного запаса при групповом поступлении лесоматериалов и поштучной обработке одним механизмом

Задача рассматривается на примере [22] работы сучкорезной установки на нижнем лесном складе (рис. 2.25).

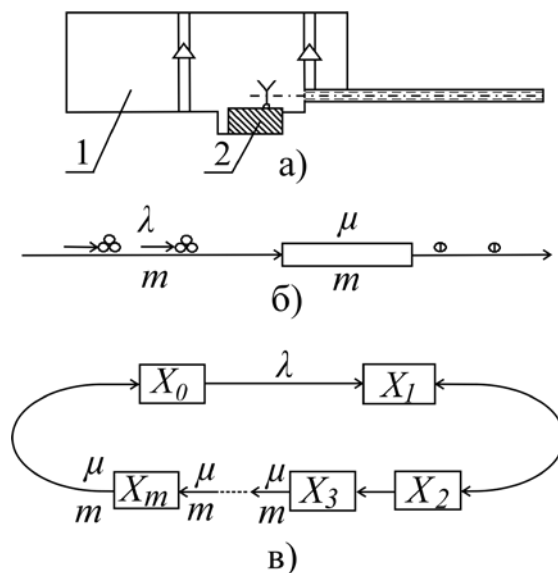


Рис. 2.25. Технологическая схема работы сучкорезной установки в потоке и её граф состояний: а – схема установки; б – схема работы; в – схема интенсивности обработки

Машина может находиться в следующих состояниях:

X_0 – свободное состояние машины;

X_1 – машина в состоянии обработки первого предмета труда;

X_2 – машина в состоянии обработки второго предмета труда;

X_m – машина в состоянии обработки m -го (последнего) предмета труда из пачки;

λ – интенсивность поступления пачек, 1/мин;

μ – интенсивность обработки единиц предметов труда, 1/мин.

Математическая модель функционирования машины представляется уравнениями вида

$$\frac{dP_0}{dt} = \mu P_m - \lambda P_1,$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \lambda P_0 - \mu P_1,$$

.....

$$\frac{dP_m}{dt} = \mu P_{m-1} - \mu P_m.$$

Размер запаса m составит

$$m = \frac{\mu \Pi}{\lambda(\lambda - \Pi)}, \quad (2.103)$$

где λ – интенсивность отказов буферного устройства;
 μ – интенсивность его восстановления.

В формулы, изложенные выше, не входят характеристики надежности буферных устройств, так как на основании результатов моделирования работы систем на ЭВМ установлено, что на производительности и размере емкостей не сказывается ненадежность буферного устройства при параметре $\rho_{1\delta} = \frac{\lambda_{1\delta}}{\mu_{1\delta}} \leq 0,025$, а действующие буферные устройства имеют величины (прил. 4) значительно меньшие.

2.5.5. Определение параметров формул

Значения интенсивностей поступления λ и обработки предметов труда μ определяются формулой

$$\mu = \frac{\Pi_{см}}{q T_{см} 60}, \quad (2.104)$$

где $\Pi_{см}$ – сменная производительность по технической характеристике, м³/см, различная для смежных машин;

q – объем предмета труда, обрабатываемого за один цикл, м³;

$T_{см}$ – продолжительность смены, ч.

Если для рассматриваемой машины известны значения интенсивности отказов $\lambda_1 = 1/t_1$, где t_1 – среднее время наработки на отказ и коэффициент технической готовности K_{m2} , то интенсивность восстановления определяется как

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1 K_{m2}}{1 - K_{m2}}. \quad (2.105)$$

Время восстановления, установленное с вероятностью $P = 0,9$, определяется при экспоненциальном законе распределения из формулы

$$T_{P=0,9} = -Mt_B \ln(1 - P), \quad (2.106)$$

где Mt_B – среднее время восстановления;

P – вероятность того, что время восстановления не превысит T , установленное с вероятностью 0,9.

Второй возможностью получения необходимых данных является наблюдение за интересующим процессом. Отметки о поступлении предметов труда на обработку, длительности обработки, времени наступления отказов и время восстановления фиксируется по текущему времени. Полученные выборки обрабатываются методами статистики.

Выбор вероятности. На основании кривых рис. 2.26 и принимая $\rho_2 \geq 0,5$ (наиболее распространенная величина), получаем, что при пользовании вероятностью $P = 0,9$ имеет место потеря производительности до 5 %.

Приняв допустимую величину потерь производительности $\Delta\Pi_n$ при имеющемся показателе загрузки ρ_2 , есть возможность определить по графику (рис. 2.26) вероятность, с которой устанавливается величина m ; эта вероятность и принимается для определения T (2.7).

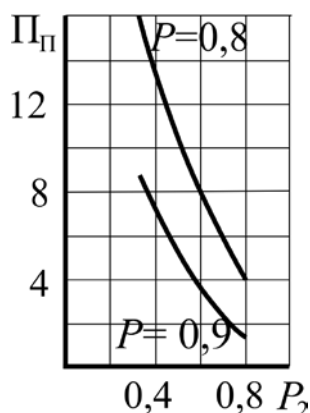


Рис. 2.26. Зависимость потерь производительности раскряжевочной установки и сортировочного лесотранспортёра от показателя загрузки оборудования и вероятности определения m

2.5.6. Итоговые расчетные формулы для некоторых показателей эффективности систем массового обслуживания в лесопромышленном производстве

В табл. 2.3 приведены итоговые расчетные формулы для некоторых показателей эффективности СМО с ожиданием при простейшем входящем потоке требований. Обслуживание однофазное, без приоритета при числе обслуживающих устройств $M \geq 1$. Распределение времени обслуживания заявки принято произвольным (любым), показательным и эрланговским [19]. В формулах приняты следующие обозначения:

λ – интенсивность входящего потока требований;

μ – интенсивность обслуживания требований;

ρ – коэффициент использования системы; $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$;

σ – среднее квадратическое отклонение времени обслуживания;

K – параметр распределения Эрланга (при $K = 1$ время обслуживания соответствует показательному распределению);

θ – специальный коэффициент, значения которого приведены в [25].

Наиболее сложными по своей структуре являются поточные линии разветвленной структуры с гибкими связями. В них на отдельных технологических операциях используются несколько агрегатов. Между агрегатами смежных операций устанавливаются устройства, обеспечивающие накопление запасов заготовок, их передачу от агрегата предыдущей операции к агрегату последующей операции.

Для оценки эффективности поточных линий необходимо раскрыть основные закономерности их функционирования. Математическая модель поточной линии разветвленной взаимосвязанной структуры – многофазная многоканальная СМО без потерь. Число обслуживающих аппаратов в каждой фазе различно.

Рассмотрим автоматизированную поточную линию разветвленной взаимосвязанной структуры, состоящую из α последовательных фаз обработки заготовок. Каждая фаза может состоять из одного или нескольких r параллельно работающих агрегатов, i -я фаза состоит из r_i агрегатов. Состояние линии в произвольный момент времени как многофазной системы массового обслуживания определяется числом заготовок n в каждой фазе.

На поточную линию поступают заготовки, образующие простейший поток интенсивностью λ . Агрегаты линии имеют экспоненциальное распределение вероятностей продолжительности обработки одной заготовки с параметром μ_i . В установившемся режиме работы линии коэффициент использования рабочего времени агрегатов i -й фазы

$$\rho_i = \frac{\lambda}{r_i \mu_i} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha. \quad (2.107)$$

Вероятность того, что за время Δt будет закончена обработка одной из n_i заготовок, находящихся в i -й фазе, равна

$$n_i \mu_i \Delta t + o(\Delta t), \quad \text{при } n_i < r_i, \quad (2.108)$$

$$r_i \mu_i \Delta t + o(\Delta t), \quad \text{при } n_i \geq r_i. \quad (2.109)$$

Стационарное состояние автоматизированной линии разветвленной взаимосвязанной структуры описывается системой уравнений вида:

$$\begin{aligned} & \left[\lambda + \sum_{i=1}^a \delta(n_i) \alpha(n_i) \mu_i \right] p(n_1, \dots, n_a) = \\ & = \sum_{i=1}^a \delta(n_i + 1) \alpha(n_i + 1) \mu_i p(n_1, \dots, n_{i+1}, n_{i+1} - 1, \dots \\ & \dots n_{i+2}, \dots, n_a) + \lambda p(n_1 - 1, n_2, \dots, n_a). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Если любой из аргументов является отрицательным, то вероятность равна нулю и последняя сумма не содержит членов $c - 1$ и содержит один член $c + 1$. В этом уравнении

$$\alpha(n_i) = \begin{cases} n_i, & n_i < r_i; \\ r_i, & n_i \geq r_i; \end{cases}$$

$$\alpha(n_i) = \begin{cases} 1, & n_i \neq 0 \\ 0, & n_i = 0; \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, a.$$

На основании этого уравнения получены выражения распределения вероятностей для различного количества агрегатов в фазе. Они приведены в графе 2 табл. 2.4.

Вероятность отсутствия заготовок в фазе линии резко уменьшается с увеличением числа параллельно работающих агрегатов. Наиболее вероятным является число заготовок, близкое к числу агрегатов фазы. С увеличением числа параллельно работающих агрегатов возрастает вероятность того, что в фазе число заготовок больше числа агрегатов. При отсутствии ограничения возможного количества заготовок в фазах, как и в случае последовательной работы одиночных агрегатов, фазы автоматизированных линий разветвленной взаимосвязанной структуры взаимонезависимы в своей работе.

Распределение числа заготовок перед каждым агрегатом отличается от их распределения в фазах. Величина вероятности нахождения определенного числа заготовок в зоне одного агрегата значительно уменьшается при увеличении числа параллельно работающих агрегатов. Наибольшие запасы заготовок при постоянной величине загрузки агрегатов необходимы для случая одного агрегата в фазе.

Распределение числа заготовок перед каждым агрегатом отличается от их распределения в фазах. Величина вероятности нахождения определенного числа заготовок в зоне одного агрегата значительно уменьшается при увеличении числа параллельно работающих агрегатов.

Таблица 2.3

**Итоговые расчетные формулы для некоторых
показателей эффективности СМО [19]**

Характеристики СМО		Среднее число требований	
Число обслуживающих устройств	Распределение обслуживания	в системе	в очереди
1	Любое	$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\sigma^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)}$	$\frac{\lambda^2}{2(1-\rho)} \left(\sigma^2 + \frac{1}{\mu^2} \right)$
1	Показательное	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
1	Эрланговское	$\frac{K+1}{2K} \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$\frac{K+1}{2K} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
$M > 1$	Любое	$(\theta + 1) \lambda \frac{\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2}{2} \mu$	$\theta \lambda \frac{\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2}{2} \mu$
$M > 1$	Показательное	$(\theta + 1) \frac{\lambda}{\mu}$	$\theta \frac{\lambda}{\mu}$
$M > 1$	Эрланговское	$(\theta + 1) \frac{\lambda}{\mu} \frac{(K+1)}{2K}$	$\theta \frac{\lambda}{\mu} \frac{(K+1)}{2K}$
1	Любое	$\frac{1}{\mu} + \frac{\sigma^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)}$	$\frac{\lambda^2}{2(1-\rho)} \left(\sigma^2 + \frac{1}{\mu^2} \right)$
1	Показательное	$\frac{1}{\mu - \lambda}$	$\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$
1	Эрланговское	$\frac{K+1}{2K} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$	$\frac{K+1}{2K} \frac{1}{\mu - \lambda}$
$M > 1$	Любое	$(\theta + 1) \frac{\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2}{2} \mu$	$\theta \lambda \frac{\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2}{2} \mu$
$M > 1$	Показательное	$(\theta + 1) \frac{1}{\mu}$	$\frac{\theta}{\mu}$
$M > 1$	Эрланговское	$\frac{(\theta + 1)}{\mu} \frac{K+1}{2K}$	$\frac{\theta}{\mu} \frac{K+1}{2K}$

Наибольшие запасы заготовок при постоянной величине загрузки агрегатов необходимы для случая одного агрегата в фазе.

Основные количественные показатели качества функционирования автоматизированных линий разветвленной взаимосвязанной структуры определяются на основании зависимости распределения числа заготовок в фазе линии от числа параллельно работающих агрегатов и средней величины их загрузки по времени.

Среднее число заготовок, находящихся на автоматизированной поточной линии, можно вычислить, умножая вероятность числа заготовок в фазах линии $p(n_1, n_2, \dots, n_k)$ на сумму $(n_1 + n_2 + \dots + n_k)$ и суммируя по n_1, n_2, \dots, n_k :

$$\begin{aligned} L &= \sum_{\substack{n_1=0 \\ n_2=0 \\ \dots \\ n_k=0}}^{\infty} (n_1 + n_2 + \dots + n_k) p(n_1, n_2, \dots, n_k) = \\ &= p(0, 0, \dots, 0) \sum_{\substack{n_1=0 \\ n_2=0 \\ \dots \\ n_k=0}}^{\infty} (n_1 + n_2 + \dots + n_k) \prod_{i=1}^k b(n_i). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Аналогичным путем можно определить другие показатели качества функционирования линии.

Исходя из распределения вероятностей числа заготовок в фазе, определим среднее число заготовок, находящихся в зоне агрегатов этой фазы, суммируя произведения числа заготовок на его вероятность:

$$L_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i p(n_i) = \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{n_i b(n_i)}{\sum_{n_i=0}^{\infty} b(n_i)}. \quad (2.112)$$

Конкретные выражения, полученные на основании этой общей формулы для различного числа параллельно работающих агрегатов, приведены в табл. 2.4 (графа 3).

Среднее число заготовок, обрабатываемых агрегатами i -й фазы,

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{n_i=0}^{r_i-1} n_i p(n_i) + \sum_{n_i=r_i}^{\infty} r_i p(n_i) = \\ &= p(0) \left[\sum_{n_i=1}^{r_i-1} \frac{n_i}{n_i!} (r_i \rho_i)^{n_i} + r_i \sum_{n_i=r_i}^{\infty} \frac{r_i^r i}{r_i!} \rho_i^{n_i} \right] = r_i \rho_i, \end{aligned} \quad (2.113)$$

то есть одновременно в i -й фазе обрабатывается в среднем $r_i \rho_i$ заготовок.

Среднее число заготовок, накапливаемых в буферных устройствах перед агрегатами i -й фазы,

$$L_{ож_i} = \sum_{n_i=r_i+1}^{\infty} (n_i - r_i) p(n_i) = \sum_{n_i=r_i+1}^{\infty} \frac{(n_i - r_i) b(n_i)}{\sum_{n_i=0}^{\infty} b(n_i)}. \quad (2.114)$$

Из этой общей формулы получены выражения для определения среднего числа заготовок, накапливаемых в фазе линии и перед каждым агрегатом фазы, при различном количестве параллельно работающих агрегатов. Они сведены в табл. 2.4 (графа 5).

Полученные здесь теоретические зависимости между основными показателями качества использования оборудования в линиях разветвленной взаимосвязанной структуры громоздки и пользоваться ими при расчетах не совсем удобно. Для практических расчетов были получены упрощенные эмпирические соотношения.

Общее среднее число заготовок, находящихся в зоне агрегатов i -й операции, определяется

$$L_i = L_1 C_{\rho}^r i^{-1}, \quad (2.115)$$

где

$$L_1 = \frac{\rho_1}{1 - \rho_i}; \quad C_{\rho} = \frac{5}{9}(1 - \rho_i) + 1.$$

Общее среднее число заготовок, накапливаемых перед агрегатами 1-й операции и ожидающих начала их обработки определяем из выражений (2.114) и (2.115):

$$L_{ож} = L_1 C_{\rho}^r i^{-1} - r_i \rho_i. \quad (2.116)$$

Таблица 2.4

Основные показатели качества функционирования
поточных линий разветвленной взаимосвязанной структуры [19]

Кол-во параллельно соединенных r_i	Вероятность того, что в фазе i находится n_i заготовок $p(n_i) = \frac{b(n_i)}{\sum_{n_i=0}^{\infty} b(n_i)};$ $b(n_i) = \begin{cases} \frac{1}{n_i l} (r_i \rho_i)^{n_i}, & n_i < r_i \\ \frac{r_i}{r_i l} \rho_i^{n_i}, & n_i \geq r_i \end{cases}$	Среднее число заготовок в фазе i на агрегате $L_i \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i \rho(n_i)$	Ср. число загот. на одном агрегате $L_{oi} = \rho_i$	Среднее число заготовок, накапливаемых перед агрегатом $L_{ож_i} = \sum_{n_i=r_i+1}^{\infty} (n_i - r_i) \rho(n_i)$
1	2	3	4	5
1	$\rho_i^{n_i} (1 - \rho_i)$	$\frac{\rho_i}{1 - \rho_i}$	ρ_i	$\frac{\rho_i^2}{1 - \rho_i}$
2	$\frac{1}{n_i l} (2\rho_i)^{n_i} \frac{1 - \rho_i}{1 + \rho_i}, \quad n_i \leq 1$ $2\rho_i^{n_i} \frac{1 - \rho_i}{1 + \rho_i}, \quad n_i \geq 2$	$\frac{\rho_i}{1 - \rho_i^2}$	ρ_i	$\frac{\rho_i^3}{1 - \rho_i^2}$
3	$\frac{1}{n_i l} (3\rho_i)^{n_i} \frac{1 - \rho_i}{1 + 2\rho_i + \frac{3}{2}\rho_i^2}, \quad n_i \leq 2$ $\frac{9}{2}\rho_i^{n_i} \frac{1 - \rho_i}{1 + 2\rho_i + \frac{3}{2}\rho_i^2}, \quad n_i \geq 3$	$\frac{\rho_i(1 + \rho_i - \frac{1}{2}\rho_i^2)}{1 + \rho_i - 0,5\rho_i^2 - 1,5\rho_i^3}$	ρ_i	$\frac{1,5\rho_i^4}{1 + \rho_i - 0,5\rho_i^2 - 1,5\rho_i^3}$

Окончание табл. 2.4

1	2	3	4	5
4	$\frac{1}{n_i l} (4\rho_i)^{n_i} \frac{1-\rho_i}{1+3\rho_i+4\rho_i^2+\frac{8}{3}\rho_i^3}, n_i \leq 3$ $\frac{32}{3} \rho_i^{n_i} \frac{1-\rho_i}{1+3\rho_i+4\rho_i^2+\frac{8}{3}\rho_i^3}, n_i \geq 4$	$\frac{\rho_i(1+2\rho_i+\rho_i^2-\frac{4}{3}\rho_i^3)}{1+2\rho_i-\rho_i^2-\frac{4}{3}\rho_i^3-\frac{8}{3}\rho_i^4}$	ρ_i	$\frac{\frac{8}{3}\rho_i^4}{1+2\rho_i+\rho_i^2-\frac{4}{3}\rho_i^3-\frac{8}{3}\rho_i^4}$
5	$\frac{1}{n_i l} (5\rho_i)^{n_i} \frac{1-\rho_i}{1+4\rho_i+7.5\rho_i^2+\frac{25}{3}\rho_i^3+\frac{125}{24}\rho_i^4}, n_i \leq 4$ $\frac{625}{24} \rho_i^{n_i} \frac{1-\rho_i}{1+4\rho_i+7.5\rho_i^2+\frac{25}{3}\rho_i^3+\frac{125}{24}\rho_i^4}, n_i \geq 5$	$\frac{\rho_i(1+3\rho_i+3.5\rho_i^2+\frac{5}{6}\rho_i^3-\frac{25}{8}\rho_i^4)}{1+3\rho_i+3.5\rho_i^2-\frac{5}{6}\rho_i^3-\frac{25}{8}\rho_i^4-\frac{125}{24}\rho_i^5}$	ρ_i	$\frac{\frac{125}{24}\rho_i^5}{1+3\rho_i+3.5\rho_i^2+\frac{5}{6}\rho_i^3-\frac{25}{8}\rho_i^4-\frac{125}{24}\rho_i^5}$

**ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА
МЕЖОПЕРАЦИОННЫХ
ЗАПАСОВ ЛЕСОМАТЕРИАЛОВ
В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПОТОКАХ
ЛЕСОПРОМЫШЛЕННОГО
ПРОИЗВОДСТВА**

3.1. Обоснование запаса хлыстов (деревьев) для трелевки при одном трелёвочном тракторе

Лесосечные работы проводятся с использованием валочно-пакетирующих (ВПМ) и трелевочных машин.

Исходные данные

Средний объем хлыста $q = 0,45 \text{ м}^3$.

Производительность валочно-пакетирующей машины $\Pi_{ВПМ} = 56 \text{ м}^3/\text{смену}$.

Производительность трелевочного трактора ТДТ-55 $\Pi_T = 65 \text{ м}^3/\text{смену}$ (при расстоянии трелевки до 300 м).

Объем трелеваемого воза $Q = 4,4 \text{ м}^3$.

Продолжительность смены $T_{см} = 7 \text{ ч}$.

Интенсивность поломок для трактора ТДГ-55 $\lambda_1 = \frac{1}{3,33} = 0,03 \text{ 1/ч}$.

Коэффициент технической готовности ТДТ-55 $K_z = 0,8$.

Средняя продолжительность устранения отказа валочно-пакетирующей машины ЛП-2 составляет 0,8 ч.

Определить, при каком количестве пачек деревьев в запасе не будет простоев трелевочного трактора из-за ВПМ.

Решение

Производительность системы Π_c не может быть больше производительности любого из ее механизмов.

$\Pi_c^{\max} = \Pi_{ВПМ} = 56 \text{ м}^3/\text{смену}$, так как $\Pi_{ВПМ} < \Pi_T = 63 \text{ м}^3/\text{смену}$.

ВПМ формирует пачку деревьев для дальнейшего обслуживания. Параметр потока требований

$$\lambda_2 = \frac{\Pi_{ВПМ}}{QT_{см}} = \frac{56}{4,4 \cdot 7} = 1,82 \text{ пачки/ч. } \Pi_c^{\max} = 1,82 \text{ пачки/ч.}$$

Обслуживает поток трактор ТДТ-55 производительностью

$$\mu_2 = \frac{\Pi_T}{QT_{см}} = \frac{63}{4,4 \cdot 7} = 2,04 \text{ пачки/ч.}$$

Показатель отказов для приведенных данных будет

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1},$$

где $\mu_1 = \frac{\lambda_1 K_c}{1 - K_c}$, 1/ч; $\mu_1 = \frac{0,03 \cdot 0,8}{1 - 0,8} = 0,12$, 1/ч; $\rho_1 = \frac{0,03}{0,12} = 0,25$.

Размер запаса для данных условий работы ВПМ и ТДТ-55

$$m = \left[\frac{0,03 + 2,04 + 0,25(0,03 + 1,82 + 2,04)}{(1 + 0,25)(0,03 + 1,82 + 2,04)} \right] 1,82T = 2,1 \approx 2 \text{ пачки,}$$

где $T = -\frac{\ln(1 - P)}{\mu_{1\text{ВПМ}}} = -\frac{\ln(1 - 0,9)}{\frac{1}{0,8}} = 1,85 \text{ ч.}$

Для достижения максимальной производительности системы следует иметь запас поваленных деревьев не менее двух пачек.

3.2. Обоснование запаса хлыстов (деревьев) для трелевки при нескольких обслуживающих механизмах

Лесосечные работы проводятся бензомоторными пилами и трелевочными тракторами.

Исходные данные

Производительность бензопилы на валке при среднем объеме хлыста $0,4 \text{ м}^2$, $\Pi_g = 118 \text{ м}^3/\text{смену}$.

Производительность трелевочного трактора ТДТ-55 при среднем расстоянии трелевки до 300 м, $\Pi_m = 68 \text{ м}^3/\text{смену}$.

Объем трелеваемого воза $Q = 4,4 \text{ м}^3$.

Продолжительность смены $T_{cm} = 7 \text{ ч.}$

При таком соотношении производительности механизмов целесообразна схема работы «одна бензопила – два ТДТ-55».

Требуется определить, при каком запасе поваленных деревьев на лесосеке обеспечивается достижение максимальной производительности.

Решение

Максимально возможная производительность в данном случае

$$\Pi_c^{\max} = \Pi_g = 118 \text{ м}^3/\text{смену}.$$

Интенсивность поступления поваленных деревьев

$$\lambda = \frac{\Pi_g}{qT_{cm}} = \frac{118}{0,4 \cdot 7} = 42,1 \text{ шт/ч.}$$

Этот поток обслуживается двумя трелевочными тракторами ($n = 2$), производительность каждого из них составляет

$$\mu = \frac{P_T}{qT_{cm}} = \frac{68}{0,4 \cdot 7} = 22,5 \text{ шт/ч.}$$

Необходимый на лесосеке запас из m деревьев при потребной пропускной способности системы $P^i < \lambda = 42,1$ шт/ч определяется по приведенной ниже формуле.

Величины, входящие в формулу:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{42,1}{22,5} = 1,87;$$

$$\alpha = \frac{\rho}{n} = \frac{1,87}{2} = 0,93.$$

Потери производительности $\Delta P_n = P_c^{\max} - P^i$, при $\Delta P_n = 1\%$ от P_c^{\max} получим

$$P^i = 0,99; \quad P_c^{\max} = 0,99 \cdot 42,1 = 41,7 \text{ шт/ч;}$$

$$\Delta P_n = 42,1 - 41,7 = 0,4 \text{ шт/ч.}$$

Значения величин, входящих в формулу размера запаса m

$$R_{(n,\rho)} = 0,7 \text{ (см. рис. 2.21); } P_{(n,\rho)} = 0,28 \text{ (см. рис. 2.22).}$$

Величина запаса составит

$$m = \frac{\ln \left\{ \frac{0,4}{42,1} \left[0,7 + \frac{0,28 \cdot 0,93}{1 - 0,93} \right] : \left[0,28 \left(1 + \frac{0,4}{42,1} \cdot \frac{0,93}{1 - 0,93} \right) \right] \right\}}{\ln 0,93} = 27,8 \approx 28 \text{ шт.}$$

При таком запасе поваленных деревьев (28 шт.) производительность системы «бензопила – два трелевочных трактора» будет практически максимальной. Этот запас должен быть создан на лесосеке до начала работы трелевочных тракторов.

3.3. Расчёт запаса деревьев для погрузки при одном погрузчике

На мастерском участке деревья к месту погрузки подаются двумя трелевочными тракторами ТДТ-55. Погрузка производится челюстным погрузчиком ПЛ-1.

Исходные данные [23]

Производительность погрузчика (при среднем объеме хлыста $0,35 \text{ м}^3$) $P_{\text{П}} = 155 \text{ м}^3/\text{смену}$.

Производительность ТДТ-55 (для среднего расстояния трелевки до 300 м) $P_{\text{Т}} = 57 \text{ м}^3/\text{смену}$.

Объем трелюемой пачки $Q = 4,0 \text{ м}^3$.

Интенсивность поломок погрузчика ПЛ-1 составляет $\lambda_1 = 0,06 \text{ 1/ч}$.

Коэффициент технической готовности $K_z = 0,8$.

Длительность смены $T_{\text{см}} = 7 \text{ ч}$.

Определить, при каком запасе для погрузки обеспечивается максимально возможный объем вывозки.

Решение

Интенсивность поступления пачек на погрузочный пункт

$$\lambda_2 = \frac{2P_{\text{Т}}}{QT_{\text{см}}} = \frac{2 \cdot 57}{4,0 \cdot 7} = 4,07 \text{ пачки/ч.}$$

Интенсивность погрузки

$$\mu_2 = \frac{P_{\text{П}}}{QT_{\text{см}}} = \frac{155}{4,0 \cdot 7} = 5,53 \text{ пачки/ч.}$$

Интенсивность восстановления работоспособности погрузчика после наступления отказа

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1 K_z}{1 - K_z} = \frac{0,06 \cdot 0,8}{1 - 0,8} = 0,24 \text{ 1/ч.}$$

Коэффициент использования $\rho_2 = \frac{4,07}{5,53} = 0,73$.

Показатель отказов $\rho_1 = \frac{0,06}{0,24} = 0,25$.

Количество деревьев в запасе на погрузке должно составлять не менее

$$m = \left[\frac{0,06 + 5,53 + 0,25(0,06 + 4,07 + 5,53)}{(1 + 0,25)(0,06 + 4,07 + 5,53)} \right] 4,07 \times 9,6 = 25,8 \approx 26 \text{ пакетов}$$

или $mq = 26 \cdot 4,0 = 104 \text{ м}^3$.

$$T = -\frac{\ln(1-0,9)}{0,24} = 9,6 \text{ ч.}$$

При наличии запаса 104 м^3 будет наиболее эффективна работа ПЛ-1.

При схеме работы, когда один погрузчик ПЛ-1 обслуживает поток деревьев, доставленных к месту погрузки тремя трелевочными тракторами ТДТ-55 (расстояние трелевки до 400 м), запас на погрузочном пункте должен составить

$$m = \left[\frac{0,06 + 5,53 + 0,25(0,06 + 5,14 + 5,53)}{(1 + 0,25)(0,06 + 5,14 + 5,53)} \right] 5,14 \times 9,6 \approx 30 \text{ пачек,}$$

где $\lambda_2 = \frac{3\Pi_T}{QT_{cm}} = \frac{3 \times 48}{4,0 \times 7} = 5,14 \text{ пачки/ч.}$

3.4. Расчет запаса деревьев при работе нескольких погрузчиков

На мастерском участке деревья к месту погрузки подаются семью трелевочными тракторами ТДТ-55. Погрузка ведется тремя погрузчиками ПЛ-1 ($n = 3$).

Производительность машин составит, соответственно, (см. предыдущий пример)

$$\Pi_T = 57 \text{ м}^3/\text{смену}, \Pi_{\Pi} = 155 \text{ м}^3/\text{смену}.$$

Необходимо определить, при каком количестве древесины в запасе обеспечивается максимальная производительность погрузочного пункта.

Допустимые потери принимаются равными 1 %.

Решение

Интенсивность поступления пакетов к погрузочному пункту составит

$$\lambda = \frac{7\Pi_T}{QT_{cm}} = \frac{7 \times 57}{4,0 \times 7} = 14,24 \text{ пачки/ч.}$$

Один погрузчик грузит

$$\mu = \frac{\Pi_{\Pi}}{QT_{cm}} = \frac{155}{4,0 \times 7} = 5,53 \text{ пачки/ч.}$$

Дополнительные величины, входящие в формулу:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{14,24}{5,53} = 2,57;$$

$$\alpha = \frac{\rho}{n} = \frac{2,57}{3} = 0,857;$$

$$\Delta P = 0,01 P^{\max} = 0,01 \times 14,24 = 0,14 \text{ пачки/ч};$$

$$R_{(3;2,57)} = 0,6 \text{ (см. рис. 2.21);}$$

$$P_{(3;2,57)} = 0,2 \text{ (см. рис. 2.22).}$$

Необходимый запас древесины на погрузке равен:

$$m = \frac{\ln \left\{ \frac{0,14}{14,24} \left[0,6 + \frac{0,2 \times 0,857}{1 - 0,857} \right] : \left[0,2 \left(1 + \frac{0,14 \times 0,857}{14,24(1 - 0,857)} \right) \right] \right\}}{\ln 0,857} = 26,5 \text{ пачек.}$$

Таким образом, для достижения максимальной пропускной способности погрузочного пункта, на котором работают три погрузчика, необходим запас не менее 108 м³.

3.5. Расчет запаса деревьев с кронами перед сучкорезной установкой

К разгрузочной площадке древесина доставляется автопоездами МАЗ- 509 с прицепом-ропуском [22].

Исходные данные

Нагрузка на рейс с учетом того, что вывозка производится деревьями, $Q = 16,2 \text{ м}^3$.

Количество рейсов в смену $n = 11$.

Производительность поштучно-сучкорезной установки ПСЛ-2 $P'_0 = 175 \text{ м}^3$ в смену при среднем объеме хлыста $0,5 \text{ м}^3$. Продолжительность смены $T_{см} = 7 \text{ ч}$.

Технически возможная производительность (пропускная способность) установки ПСЛ-2 с учетом коэффициента технической готовности $K_{т.г.} = 0,8$ составляет $P = 240 \text{ м}^3/\text{см}$.

Определить емкость площадки перед узлом обрезки сучьев для получения производительности $P = 240 \text{ м}^3/\text{см}$.

Решение. Имеем систему, в которой поступление деревьев осуществляется группами (пакеты деревьев, разгружаемые с автолесовоза), в то время как обслуживание производится в одиночном порядке (каждое дерево обрабатывается в сучкорезной установке индивидуально).

Интенсивность поступления пакетов

$$\lambda = \frac{n}{T_{см}} = \frac{11}{7} = 1,57 \text{ ед/ч или в деревьях,}$$

$$\lambda = 1,57 \frac{16,2}{0,5} = 50,87 \text{ ед/ч.}$$

Интенсивность обработки деревьев

$$\mu = \frac{П}{T_{см} q} = \frac{240}{7 \times 0,5} = 68,6 \text{ ед/ч.,}$$

$$Π_0 = \frac{Π'_0}{q T_{см}} = \frac{175}{0,5 \cdot 7} = 50 \text{ ед/ч.}$$

Учитывая, что хлысты поступают группами, оптимальный размер запаса составляет:

$$m = \frac{Π_0 \mu}{\lambda(\lambda - Π_0)} = \frac{50,0 \cdot 68,6}{50,87 \cdot (50,87 - 50,0)} = 78 \text{ ед.}$$

Так как в пакете насчитывается в среднем $Q/q = 16,2/0,5 = 32$ ед, разгрузочную площадку следует устроить размером на $78/32 = 2,5 \div 3$ пакета.

Размер запаса, ограниченный надежностью машины

$$m = \mu T = 68,6 \cdot 0,3 \cong 21 \text{ ед.}$$

3.6. Расчет запаса хлыстов для раскряжевки

Исходные данные

Производительность поштучно-сучкорезной установки ПСЛ-2 $Π_0 = 158 \text{ м}^3/\text{см}$ [22].

Производительность раскряжевочной установки при среднем объеме хлыста $q = 0,5 \text{ м}^3$ составляет $Π_p = 163 \text{ м}^3/\text{см}$.

Из данных наблюдений для Мостовского ЛПХ (прил. 10):

- интенсивность отказов раскряжевочной установки $\lambda_1 = 0,78 \text{ 1/ч}$;
- интенсивность восстановления работоспособности $\mu_1 = 7,02 \text{ 1/ч}$;
- число часов работы в смену $T_{см} = 7 \text{ ч}$.

Определить размер запаса перед раскряжевочной установкой для получения максимально возможной производительности (пропускной способности) системы из двух установок $\Pi = 158 \text{ м}^3/\text{см}$.

Решение

Интенсивность поступления хлыстов на раскряжевку

$$\lambda_2 = \frac{\Pi_0}{qT_{см}} = \frac{158}{0,5 \cdot 7} = 45,1 \text{ ед./ч.}$$

Темп (интенсивность) раскряжевки

$$\mu_2 = \frac{\Pi_p}{qT_{см}} = \frac{163}{0,5 \cdot 7} = 46,6 \text{ ед./ч.}$$

Время восстановления ПЛХ-ЗАС с вероятностью 0,9 составит

$$T_2 = \frac{\ln(1-P)}{\mu_1} = -\frac{\ln(1-0,9)}{7,02} = 0,33 \text{ ч.}$$

Длительность простоя ПСЛ-2 из-за отсутствия древесины с вероятностью 0,9 составит

$$T_1 = -\frac{\ln(1-P)}{\mu} = \frac{\ln(1-0,9)}{60 \cdot 0,17} = 0,23 \text{ ч,}$$

где μ – из приложения 10 для Мостовского ЛПХ.

Общий размер площадки для запаса хлыстов должен иметь величину из уравнения (2.7):

$$m = \left[\frac{(0,78 + 46,6) 0,23 + 0,111 (0,78 + 45,1 + 46,6) 0,33}{(1 + 0,111)(0,78 + 45,1 + 46,6)} \right] \cdot 45,1 \cdot 0,33 \approx 6 \text{ ед.}$$

Максимальный размер запаса

$$m = 45,1 \cdot 0,33 = 15 \text{ ед.}$$

3.7. Расчет емкости питателя для сортиментов перед сортировкой

Исходные данные

Сменная производительность раскряжевочной установки [22]
 $\Pi_p = 189 \text{ м}^3/\text{см}$.

Средний объем хлыста $q = 0,76 \text{ м}^3$.

Сортировка проводится продольным лесотранспортером с ГСУ.

Скорость тягового органа $V_m = 0,71 \text{ м/с}$.

Средняя длина выпиливаемых сортиментов $l = 4 \text{ м}$.

Возможный коэффициент загрузки цепи лесотранспортера $K_1 = 0,97$.

Согласно данным наблюдений, надежность лесотранспортера характеризуется величинами:

$$\lambda_1 = 0,003 \text{ 1/мин}; \mu_1 = 0,222 \text{ 1/мин}; \rho_1 = 0,014.$$

Число часов работы в смену $T_{см} = 7$ ч.

Представляется возможной схема работы двух раскряжевочных установок на один лесотранспортер.

Определить необходимый размер запаса сортиментов перед сортировочным лесотранспортером с учетом максимальной загрузки агрегатов работой.

Решение. Принимая во внимание, что из одного хлыста в среднем выпиливается четыре сортимента, интенсивность выхода сортиментов и поступления их на лесотранспортер от двух раскряжевочных установок составит

$$\lambda_1 = 2 \frac{P_p}{q T_{см} 60} \cdot 4 = 2 \cdot \frac{189}{0,76 \cdot 7 \cdot 60} \cdot 4 = 4,74 \text{ ед./мин.}$$

Средняя продолжительность одного цикла, то есть время, необходимое для прохода сброшенного бревна с приемного стола на длину $l = 4$ м:

$$t_{CP} = \frac{l}{V_T} = \frac{4}{0,71} = 5,63 \text{ с.}$$

Параметр времени обслуживания для лесотранспортера с учетом межторцевых разрывов

$$\mu_2 = \frac{1 \cdot 60}{t_{CP}} K_1 = \frac{1 \cdot 60}{5,63} \cdot 0,97 = 10,34 \text{ ед./мин.}$$

Время восстановления ТС-7 с ГСУ с вероятностью 0,9

$$T = -\frac{\ln(1-P)}{\mu_1} = -\frac{\ln(1-0,9)}{0,222} = 10,37 \text{ мин.}$$

Из уравнения (2.6) потребный размер емкости составит:

$$m = \frac{(0,003 + 10,34) \cdot 4,74}{(1 + 0,014)(0,003 + 4,74 + 10,34)} \cdot 10,37 \approx 33 \text{ ед.}$$

При устройстве подобной буферной емкости для сортиментов возможна стабильная работа двух раскряжевочных установок на один сортировочный лесотранспортер с общей производительностью системы $P_0 = 2P_p = 189 \cdot 2 = 378 \text{ м}^3/\text{см}$ (рис. 3.27).

Выдача сортиментов на лесотранспортер может производиться поочередно из каждой буферной емкости, но подача их в буферные емкости должна обеспечиваться непрерывно. Следовательно, при плоской буферной емкости необходимо двухсекционное ее выполнение при реверсировании подающих цепей. Возможно применение буферной емкости бункерного типа с выносными цепями.

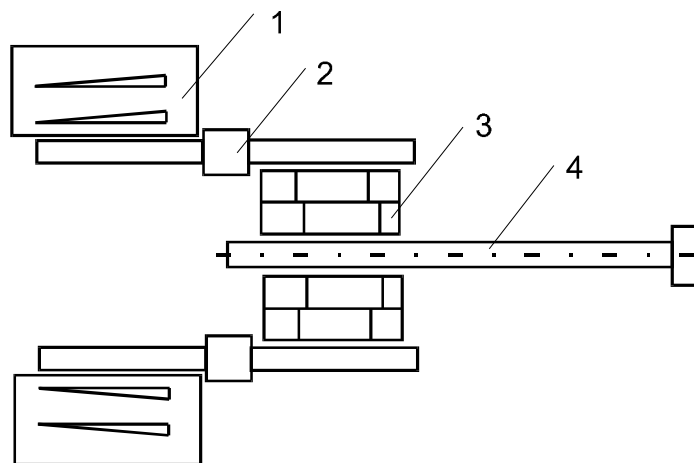


Рис. 3.27. Схема двух раскряжевочных установок, работающих на один сортиментный лесотранспортер: 1 – разгрузочная площадка; 2 – раскряжевочная установка; 3 – буферная ёмкость; 4 – сортиментный лесотранспортер

3.8. Расчет лесонакопителей для последующей штабелевки и погрузки

Сортировка производится ТС-7 с ГСУ. Интенсивность работы лесотранспортера $\lambda_2 = 10,34$ сортиментов/мин (см. предыдущую задачу). Сортировка осуществляется на $S = 10$ сортиментов. Время одного цикла выгрузки бревен из лесонакопителя с учетом времени возвращения крана ККУ-7,5 к очередному наполненному лесонакопителю $t_u = 2,3$ мин (по данным Бобруйского леспромхоза).

Сортиментный состав в процентах к общему количеству бревен, полученных после раскряжевки, приведен в табл. 3.1.

Интенсивность поступления различных сортиментов определяется по формуле

$$\lambda_{2i} = \lambda_2 P_i,$$

где λ_{2i} – интенсивность поступления бревен в лесонакопитель для искомого i -го сортимента;

P_i – вероятность поступления данного сортимента.

Полученные данные интенсивности поступления сортиментов приведены в табл. 3.2.

Среднее время между выгрузкой бревен из одного лесонакопителя определяется

$$t_{\text{ц}i} = \left(\frac{1 - P_i}{P_i} \right) t_{\text{ц}}, \quad \text{или} \quad \mu_i = \frac{1}{t_{\text{ц}i}}.$$

Таблица 3.1

Сортиментный состав

№ п/п	Сортименты	Процент от общего количества бревен	Вероятность поступления бревен	Средний объем бревна, м ³
1	Пиловочник хвойный	25	0,25	0,20
2	Пиловочник лиственный	20	0,20	0,25
3	Фанерный кряж: длинной 1,6 м длинной 3,2 м	10 6	0,10 0,06	0,06 0,10
4	Спичечный кряж	4	0,04	0,08
5	Строительное бревно	10	0,10	0,10
6	Рудничная стойка	5	0,05	0,07
7	Клепочный кряж	4	0,04	0,02
8	Прочая деловая древесина	7	0,07	0,08
9	Дровяная древесина	9	0,09	0,01

Емкость лесонакопителей и их число, шт., рассчитаны по формуле

$$m_i = \frac{\lambda_i (\mu_i + \Pi - \lambda_i)}{(\lambda_i - \Pi) \mu_i}.$$

Результаты приведены в табл. 3.2.

Объем накопителя равен 8 м³.

Значение пропускной способности взято с учетом потерь 1 %.
($\Pi_i = 0,99\lambda_{2i}$).

Емкость лесонакопителей определяется грузоподъемностью крана. Для крана ККУ-7,5 емкость одного лесонакопителя принимается равной 8 м³. Так, при объеме одного бревна 0,2 м³ число бревен в лесонакопителе, ограниченное грузоподъемностью крана, равно 40. Так как для нормальной сортировки требуется запас в 82 бревна

(табл. 3.2), то для него следует иметь не менее двух лесонакопителей. Подобным образом определено число лесонакопителей и для остальных сортиментов.

Производительность лесотранспортера определяется как

$$\Pi_{TP} = \frac{V_T q}{l} \cdot 60. \quad (3.3)$$

$$\text{Откуда } V_T = \frac{\Pi_{TP} \cdot l}{q \cdot 60} = \frac{3,408 \cdot 4}{0,19 \cdot 60} = 1,2 \text{ м/с},$$

где q – средний объем бревна, м³;

V_T – скорость сортировочного лесотранспортера, м/с;

l – длина бревна, м.

Возможна установка двухскоростного редуктора на ведущей станции. Повышенная скорость должна включаться только при освобождении буферной емкости.

Таблица 3.2

Полученные данные интенсивности поступления сортиментов

Показатели	Порядковый номер сортимента									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Интенсивность выгрузки накопителя μ_i , пачек/мин	0,145	0,109	0,043	0,028	0,018	0,043	0,022	0,018	0,032	0,042
Необходимая емкость накопителя m_i , шт.	82	79	79	93	80	79	81	80	82	80
Число накопителей с учетом грузоподъемности крана	2	2 – 3	1	1	1 – 2	1	1 – 2	1	1	1
Интенсивность поступления сортиментов, шт/мин	2,59	2,07	1,03	0,62	0,41	1,03	0,52	0,41	0,73	0,93

3.9. Расчет запаса сортиментов на складе

Интенсивность потока сортиментов, получающихся при раскряжке, подвержена колебаниям около среднего значения интенсивности выхода и с некоторыми допущениями может быть принята постоянной [23].

Объем погрузки лесоматериалов в вагоны МПС и на другой транспорт можно описать законом Пуассона.

Пусть объем пачек равен $V = 8,0 \text{ м}^3$ (при использовании кранов ККУ-7,5).

Коэффициент нагрузки склада сортиментов будет

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

где λ – интенсивность входящего на склад потока пачек бревен, пачек/мин;

μ – интенсивность отправки древесины потребителю или в собственные цеха для переработки, пачек/ мин.

Ввиду случайных процессов поступления сортиментов и отгрузки их потребителю на складе могут наблюдаться следующие состояния: нет перебоев в отгрузке древесины, интенсивность выхода выше интенсивности поступления ($\rho < 1$);

Имеются перебои в отгрузке из-за нехватки вагонов или других транспортных средств, интенсивность поступления выше интенсивности выхода ($\rho \geq 1$);

Принимая во внимание, что склады лесозаготовительных предприятий функционируют в течение длительного периода (20–40 лет), постоянным для этого случая будет являться состояние, когда $\rho < 1$. В противном случае будет происходить систематическое накапливание древесины на складе и потребуется емкость склада практически неограниченно большая.

Вероятность перегрузки склада не должна составлять величину, большую, чем $P_{пер} = 0,05$, то есть степень надежности работы склада по приему сортиментов на хранение в штабелях составляет 0,95. Коэффициент загрузки принимаем достаточно близким к 1 ($\rho = 0,999$).

Действительное число бревен в каждой пачке, уложенной в штабель, есть случайная величина, закон распределения которой записывается как $P(\ell)$, где ℓ – число бревен в пачке.

Используя преобразования, приведенные в работе [25], вероятность перегрузки склада сортиментами можно записать следующим образом:

$$P_{пер} = \rho^{m+1},$$

где m – объем склада, пачек.

$$M = \frac{\ln P_{пер-1}}{\ln \rho} = \frac{\ln 0,55}{\ln 0,999} - 1 = 2995 \approx 3000 \text{ пачек, или}$$

$$M = 3000; V = 3000 \cdot 8,0 = 2400 \text{ м}^3,$$

где V – объем одной пачки, м^3 .

Склад сортиментов имеет ограничение по высоте штабелей, которое определяется типом погрузочных механизмов.

Полученный объем склада должен быть подсчитан, исходя из минимума суммарных удельных затрат Z_0 (р/м³):

$$Z_0 = Z_n + Z_n = (C_i + \varepsilon \cdot K_i) + C_0 0,02T ,$$

где Z_n – удельные затраты по нижнескладским работам, р/м³;

Z_n – потери, связанные с исключением определенного объема сортиментов из оборота, р/м³;

C_i – себестоимость 1 м³ древесины по нижнескладским работам, р/м³;

ε – нормативный коэффициент экономической эффективности;

K_i – удельные капиталовложения, р/м³;

C_0 – себестоимость 1 м³ готовой продукции, р/м³;

T – время задержки отправки продукции потребителю, мес.

Библиографический список

1. Стратегия развития лесного комплекса Российской Федерации на период до 2020 года. – Утв. приказом Минпромторга России и Минсельхоза России от 30 октября 2008 г. № 248/482/ – М.: 2008. – 103 с.
2. Говорина О.В. Современное состояние и перспективы развития лесопромышленного комплекса Российской Федерации / О.В. Говорина // Проблемы и перспективы экономики и управления: материалы междунар. заоч. науч. конф. (Санкт-Петербург, апрель 2012 г.). – СПб.: Реномэ, 2012. – С. 41–44.
3. Лесной комплекс Среднего Урала: концепция развития до 2020 года: научн. издание / В.А. Азарёнок, Г.М. Гиреев, А.А. Добрачев и др. / под ред. А.В. Мехренцева. Екатеринбург: УГЛТУ, 2010. – 56 с.
4. Управление ГПС: Модели и алгоритмы / под общ. ред. академика АН СССР С.В. Емельянова. – М.: Машиностроение, 1987. – 368 с.
5. Хорафас Д., Легг С. Конструкторские базы данных / Пер. с англ. Д.Ф. Миронова. М.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
6. РТМ 1-75 (вторая редакция). Лесозаготовительные машины и оборудование. Оценка и методы повышения эксплуатационной надежности потоков раскряжевки хлыстов с продольным перемещением сырья на нижних складах при их проектировании и эксплуатации. Химки: ЦНИИМЭ, 1975. – 84 с.
7. Размерно-качественная характеристика сортиментов: учеб. пособие / В.В. Чамеев, В.В. Обвинцев, Б.Е. Меньшиков, Е.В. Гаева. Екатеринбург: Урал. гос. лесотехн. ун-т, 2002. – 102 с. (Сер.: Основы проектирования лесопромышленных производств. Системный подход).
8. Ширнин Ю.А. Современная технология и основы моделирования лесосечных работ: учеб. пособие. Йошкар-Ола: МарГТУ, 1987. – 95 с.
9. Редькин А.К. Управление операциями на лесных складах. М.: Лесн. пром-сть, 1979. – 208 с.
10. Копейкин А. М. Перспективы развития технологии лесопиления. М.: Лесн. пром-сть, 1989. – 104 с.
11. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: учебник для вузов. М.: Высш. шк., 1985. – 271 с.
12. Энциклопедия кибернетики. Т.2 / отв. редактор В.М. Глушков. Киев: Академия наук УССР, Главная редакция Украинской Советской энциклопедии, 1975. – 619 с.

13. Энциклопедия кибернетики. Т.1 / отв. редактор В.М. Глушков. – Киев: Академия наук УССР, Главная редакция Украинской Советской энциклопедии, 1975. – 608 с.

14. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / пер. с англ.; Под ред. И.Н. Коваленко. М.: Советское радио, 1971. – 520 с.

15. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2 книгах. Кн. 2. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. – 496 с.

16. Тараканов К.В., Овчаров Л.А., Тырышкин А.Н. Аналитические методы исследования систем. М.: Советское радио, 1974. – 240 с.

17. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

18. Редькин А.К. Применение теории массового обслуживания на лесозаготовках. М.: Лесн. пром-сть, 1973. – 152 с.

19. Батин И.В., Дудюк Д.Л. Основы теории и расчета автоматических линий лесопромышленных предприятий. М.: Лесн. пром-сть, 1975. – 176 с.

20. Тюкавин В.П., Попов Ф.П. Повышение надежности лесозаготовительной техники. М.: Лесн. пром-сть, 1978. – 168 с. (Надежность и качество)

21. Эксплуатационная надёжность полуавтоматических линий лесной промышленности / Д.К. Воевода, Н.Ф. Ковалёв, В.В. Назаров, А.К. Теслюк. М.: Лесн. пром-сть, 1971. – 120 с.

22. РТМ 1-75 (вторая редакция). Лесозаготовительные машины и оборудование. Оценка и методы повышения эксплуатационной надежности потоков раскряжевки хлыстов с продольным перемещением сырья на нижних складах при их проектировании и эксплуатации. Химки: ЦНИИМЭ, 1975. – 84 с.

23. Турлай И.В., Ковалёв Н.Ф. Определение оптимальных размеров буферных запасов: Обзорн. информ. М.: ВНИПИЭИлеспром, 1974. – 24 с. – Лесоэксплуатация.

24. Редькин А.К. Математическое моделирование и системный анализ лесоскладских операций: учеб. пособие. М.: МЛТИ, 1985. – 127 с.

25. Прабху Н. Методы теории массового обслуживания и управление запасами (изучение основных случайных процессов) / Пер. с англ. Е.Г. Коваленко; под ред. И.Н. Коваленко. М.: Машиностроение, 1969. – 356 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Характеристики нормального распределения продолжительности обслуживания транспортных средств

Операция и место наблюдения	Ср. время t_{cp} , мин	Дисперсия σ , мин	Ср. интен-сивн. μ , 1/ч	Масштаб K
Погрузка хлыстов на автопоезда:				
Бисертский ЛПХ	30	10,50	2,00	1
Новокозульский ЛПХ	16	6,00	3,86	1
Разгрузка автопоездов на нижних складах:				
Мостовской ЛПХ (К-305)	7,5	0,61	8,00	1
Байкальская ЛПБ (К-305)	6,07	1,38	9,88	1
Бисертский ЛПХ (КМ-20/5)	2,02	0,36	27,27	1
Мостовской ЛПХ (РРУ-10)	8,0	1,69	7,50	1
Гузери́пльский ЛПХ (кабель-кран)	10,0	3,10	6,00	1
Штабелевка в Бисертском ЛПХ (циклы крана ККУ-10)	4,8	1,82	12,50	2
Погрузка вагонов:				
Мостовской ЛПХ (ККУ-10 с грейфером)	46	13,20	1,30	20
Шуйско-Виданский ЛПХ (ККУ-10 со стропами)	43	16,20	1,39	10
Гузери́пльский ЛПХ (ККУ-Ю с грейфером)	55	18,30	1,09	10
Лодейно-Польский ЛПХ (ККУ-7,5 со стропами)	60	15,00	1,00	10

Приложение 2

Числовые характеристики нормального распределения нагрузок лесных ГПМ

ГПМ и операции	Средний объем хлыста, м ³	Число наблю- дений N	Средне- ариф- метическое Q_{cp}	Среднеквад- ратическое отклонение σ ,	Отношение Романов- ского $\frac{\chi^2 - r}{\sqrt{2r}}$
Погрузчики П-2 на погрузке хлыстов	0,14–0,21	9	1,484	0,756	5,06
	0,22–0,29	46	1,741	0,947	9,60
	0,29–0,39	58	2,606	0,934	2,50
	0,40–0,49	35	1,857	0,938	1,84
	0,50–0,75	174	2,100	0,851	0,56
	0,76–1,10	58	1,924	0,870	6,60
	1,1 и выше	140	2,897	0,955	2,04
Краны на разгрузке автопоездов:					
КрАЗ-214	–	140	30	3,1	2,40
МАЗ-501	–	69	25	4,2	1,84

Приложение 3

Характеристики показательного распределения интервалов времени между прибытиями транспортных средств на пункты погрузки и разгрузки

Пункт прибы- тия	Транспортные сред- ства	Среднее время t_{cp} , мин	Интенсивность λ		Критерий Пирсона	
			1/мин	1/ч	χ^2	$\chi^2_{2,5\%}$
Погрузочный пункт	Каретка УК-6-Т	34,01	0,0294	1,764	2,25	6,0
То же	Трактор ТДТ-55	52,35	0,0191	1,146	1,11	3,8
»	Автопоезда	61,72	0,0162	0,972	0,84	6,0
Нижний склад	Автопоезда	26,80	0,0372	2,238	1,20	3,8
То же	(1-й цикл наблюдений)					
»	Автопоезда	22,99	0,0435	2,610	5,12	6,0
	(2-й цикл наблюдений)					
	Автопоезда	45,24	0,0221	1,326	2,07	6,0
	(3-й цикл наблюдений)					

Характеристики распределения интервалов времени
в стационарных потоках автомобилей

Леспромхозы	Период стационар- ности потоков, часы суток	Число наблюдений	Средняя интенсив- ность λ , 1/ч	Среднее значение интервалов t , мин	Параметры гамма- распределения	
					λ	d
Афанасьевский	14 ÷ 1	299	2,59	23,2	0,044	1,035
Бисертский	10 ÷ 2	247	1,55	38,7	0,024	0,961
Зеленоборский	13 ÷ 4	558	2,21	27,1	0,027	0,921
Междуреченский	0 ÷ 4	498	3,85	15,6	0,081	1,267
Пионерский	11 ÷ 22	145	5,18	11,6	0,121	1,404
Отрадный	13 ÷ 17	161	4,12	14,6	0,174	2,543
Шамарский	10 ÷ 2	287	3,80	15,8	0,063	1,010

Характеристики процессов в лесопромышленных цехах

Наименование операции и параметра	Закон распределения	Параметры распределения			Вероят- ность $p(\chi^2)$
		α	σ	λ	
I. Подача пачек бревен со штабелей лесной биржи к гидравлическим лоткам: 1) объем пачек бревен 2) время формирования очередных пачек 3) время между моментами подачи смежных пачек бревен	Нормальный Эрланга 5-го пор-ка Нормальный	53,2 221,3 460,0	12,0 103,2 113,0	– – –	0,33 0,80 0,40
II. Сброс бревен в лоток: 1) время сброса пачки 2) время между попаданиями в лоток очередных бревен	Нормальный Нормальный	332,8 278,4	105,0 79,0	– –	0,68 0,71
III. Подача бревен к окорочным станкам: 1) время между моментами подачи очередных бревен из бассейна в окорочный блок 2) время окорки	Экспоненциальный Экспоненциальный	– 15,3	– 1,5	0.24 –	0,10 0,20
IV. Сортировка бревен: 1) время между поступлениями очередных бревен в сортировочный дворик	Нормальный	2,4	1,1	–	0,40
V. Подача бревен к лесопильным рамам: 1) время между подачей бревен на впередирамную тележку	Нормальный	14,9	2,4	–	0,50
VI. Операции в лесопильном цехе: 1) время пиления на рамах первого ряда 2) время пиления на рамах второго ряда 3) время обрезки досок 4) время торцовки одной доски	Нормальный Нормальный Нормальный Нормальный	33,4 33,3 5,4 12,4	10,2 10,3 1,1 5,8	– – – –	0,30 0,15 0,15 0,28
VII. Сортировка пиломатериалов: 1) время разбраковки досок 2) время снятия досок с конвейера 3) время вырезки бракованных участков	Нормальный Нормальный Нормальный	47,0 6,8 7,7	10,1 2,7 2,4	– – –	0,70 0,20 –
VIII. Выгрузка бревен из воды элеваторами кабельных кранов и штабелевка: 1) время между поступлениями очередных бревен в бункер 2) количество бревен в пачке	Эрланга 5-го пор-ка Нормальный	112,1 2,6	89,7 1,1	– –	– 1,10
IX. Подача бревен в бассейн окорочной: 1) время между моментами подачи бревен в бассейн перед окоркой	Экспоненциальный	–	–	0,076	0,30

Приложение 6

Время безопасной работы установок типа ПЛХ между отказами их по причинам, зависящим от сортировочных лесотранспортёров

Тип линии и место работы	Закон распределения	Число измерений	Ср. арифм. M , мин.	Время безотказной работы, мин, при вероятности P								
				2,00	2,75	6,50	9,5	13,25	17,00	22,50	30,0	43,00
Мостовой ЛПХ, ПЛХ-3	exp	175	19,25	2,00	2,75	6,50	9,5	13,25	17,00	22,50	30,0	43,00
Афанасьевский ЛПХ, ПЛХ-3АС	exp	831	4,25	0,30	0,70	1,30	2,0	2,75	3,60	4,80	6,4	9,15
Оленинский ЛПХ, ПЛХ-4	exp	191	17,08	1,80	3,75	6,00	8,8	11,55	15,30	20,40	27,3	39,00
Красноуфимский ЛПХ, ПЛХ-3АС	exp	959	3,69	0,40	0,85	1,40	1,9	2,60	3,35	4,45	6,0	8,50
Ново-Козульский ЛПХ, ПЛХ-3АС	exp	165	17,50	1,88	4,00	6,38	8,75	12,00	15,75	21,10	28,0	40,00
Ухтинский ЛПХ, ПЛХ-3АС	exp	130	15,33	1,80	3,30	5,55	7,8	10,50	13,80	18,30	24,6	35,70
Боровской ЛПХ, ПЛХ-3АС	Вейбул	144	19,50	1,65	3,50	5,60	8,0	10,80	14,30	18,80	25,2	36,00
Хандагатайский ЛПХ, ПЛХ-3АС	Бином-й	292	16,50	1,00	2,50	4,00	6,0	8,75	12,00	16,25	22,0	32,50

Приложение 7

Условия работы потоков

Леспромхоз	Состав насаждений	Ср. объём хлыста, m^3	Ср. длина сортим., м	Тип устр-ва, определяющего технологию		Тип лесотранспортёра	Кол-во смен, набл., дата
				Разгрузка	Обр. сучьев		
Мостовской	4Б3Е30с+С	0,35	2,42	К-305	ПСЛ*	ТС-7 с ГСУ	10 см, 20/1-2/11-70 г.
Афанасьевский	4ЕЗП2Б1С+Л	0,71	3,40	РРУ-10М	–	Б22 с ручным сброс.	18 см, 22/8-2/9-70 г.
Оленинский	4Е2, 5Б3, 50С	0,65	3,31	К-305	ПСЛ	ТС-7 с ГСУ	14 см, 15/7-2/8-68 г.
Красноуфимский	4ЕЗП2Б1С	0,46	3,44	КК-20	–	Б22 с ручным сброс.	20 см, 22/3-10/4-73 г.
Хандагатайский	7С3Л	0,70	3,50	К-305	–	ТС-7 с ГСУ	20 см, 21/3-12/4-73 г.
Ново-Козульский	3ПЗЕ1С1Б20С	1,41	5,85	КК-20	–	Б22 с ручным сброс.	15 см, 10/1-28/1-74 г.
Ухтинский	10С+0, 5Б	0,24	4,19	РРУ-10	–	ТТС с ручным сброс.	10 см, 5/8-16/8-74 г.
Боровский	5ЕЗС2Б	0,37	4,06	РРУ-10	–	Б22 с ручным сброс.	11 см, 19/8-29/8-74 г.

* ПСЛ – полуавтоматическая сучкорезная линия.

Приложение 8

Характеристика эксплуатационной надёжности потоков нижних складов (закон распределения экспоненциальный)

Тип линии и место работы	λ_1/μ_1 , 1/мин	Доверитель- ный интервал, 1/мин	ρ_1	Mt_0/Mt_B мин	T , мин	Коэфф. готов- ности K_T	Коэффициент использова- ния $K_{II}=T_q/$ $T_{ОБЩ}$	Средняя произво- дит-сть, м ³ /см
Мостовой ЛПХ, ПЛХ-3	<u>0,013</u> 0,117	0,0095/0,0171 0,084/0,151	0,111	<u>75,2</u> 8,5	19,7	0,93	0,82	215,5
Афанасьевский ЛРХ, ПХЛ-ЗАС	<u>0,026</u> 0,150	0,0188/0,0340 0,107/0,1930	0,173	<u>37,4</u> 6,7	15,4	0,87	0,49	106,8
Оленинский ЛПХ, ПЛХ-4	<u>0,014</u> 0,093	0,0100/0,0180 0,0666/0,1200	0,150	<u>71,4</u> 10,7	24,8	0,92	0,57	152,7
Красноуфимский ЛПХ, ПЛХ-ЗАС	<u>0,015</u> 0,134	0,0109/0,0197 0,0950/0,1720	0,112	<u>65,3</u> 7,5	17,2	0,88	0,46	147,6
Ново-Козульский ЛПХ, ПЛХ-ЗАС	<u>0,014</u> 0,019	0,0104/0,0187 0,0137/0,0247	0,737	<u>68,8</u> 52,1	121,2	0,74	0,38	136,1
Ухтинский ЛПХ, ПЛХ-ЗАС	<u>0,007</u> 0,056	0,0051/0,0092 0,040/0,072	0,125	<u>140,5</u> 17,8	41,1	0,90	0,54	105,7
Боровской ЛПХ, ПЛХ-ЗАС	<u>0,025</u> 0,220	0,0176/0,0317 0,1570/0,2830	0,114	<u>40,5</u> 4,5	10,5	0,90	0,72	137,4
Хандагатайский ЛПХ, ПЛХ-ЗАС	<u>0,007</u> 0,096	0,0047/0,0086 0,0687/0,1240	0,073	<u>150,4</u> 10,4	24,0	0,91	0,62	171,7

Приложение 9

Характеристики потоков отказов агрегатов (закон распределения экспоненциальный)

Агрегаты и место работы (ТС-29)	λ_1 , 1/мин	λ_K	Доверительный интервал, 1/мин	Mt_0 , мин
Афанасьевский ЛПХ (ПЛХ-ЗАС)	0,0340	0,98	<u>0,0024</u> 0,0044	292,2
Боровской ЛПХ (ПЛХ-ЗАС)	0,0130	0,40	<u>0,01</u> 0,02	74,10
Красноуфимский ЛПХ (ПЛХ-ЗАС)	0,0110	1,22	<u>0,008</u> 0,014	90,50
Афанасьевский ЛПХ (ПЛХ-ЗАС)	0,0070	1,22	<u>0,005</u> 0,009	143,50
Мостовской ЛПХ (ПЛХ-3)	0,0034	0,42	<u>0,0024</u> 0,0043	297,40
Оленинский ЛПХ (ПЛХ-4)	0,0055	1,40	<u>0,004</u> 0,007	183,00
СПЗС, Афанасьевский ЛПХ (ПЛХ-ЗАС)	0,0160	0,55	<u>0,011</u> 0,020	64,40
СПЗС, Боровской ЛПХ (ПЛХ-ЗАС)	0,0100	0,66	<u>0,008</u> 0,014	92,92
ГСУ, Мостовской ЛПХ (ПЛХ-3)	0,0055	0,53	<u>0,004</u> 0,007	181,14
ПРХ-2С, Оленинский ЛПХ (ПЛХ-4)	0,0048	0,30	<u>0,0034</u> 0,0062	208,00
<i>Примечание.</i> Для Афанасьевского ЛПХ рассчитаны следующие законы: экспоненциальный $\lambda_1 = 0,0034$ 1/мин; $\lambda_K = 0,98$. Эрланга $K = 2$, $\lambda_1 = 0,0074$ $\lambda_K = 1,43$. Из двух законов распределе- ния следует выбирать лучший по сходимости.				

Приложение 10

Параметры процессов восстановления

Агрегаты и место работы (ТС-29)	Закон распреде- ления	μ_1 , 1/мин	λ_K	Довери- тельный интервал, 1/мин	Mt_0 , мин	Примечание
Афанасьевский ЛПХ (ПХЛ-3АС)	exp	0,08	0,92	$\frac{0,0600}{0,1000}$	12,54	Для системы управления (Мостовой ЛПХ) получены следующие законы: Экспонен- циальный $\mu_1 = 0,092$ 1/мин; $\lambda_K=1,69$. Эрланга $K=4$, $\mu_1=1,35$ $\lambda_K=1,35$. Из трёх законов следует выби- рать лучший по сходимости, т.е. Эрланга ($n = 4$)
Боровской ЛПХ (ПЛХ-3АС)	exp	0,22	1,43	$\frac{1,5800}{2,8500}$	4,52	
Красноуфимский ЛПХ (ПЛХ-3АС)	exp	0,29	1,50	$\frac{0,2100}{0,3800}$	3,41	
Афанасьевский ЛПХ (ПЛХ-3АС)	exp	0,24	1,70	$\frac{0,1700}{0,3100}$	4,17	
Мостовской ЛПХ (ПЛХ-3)	Эрланга $K=4$	0,4	1,35	$\frac{0,3600}{0,4700}$	10,92	
Оленинский ЛПХ (ПЛХ-4)	exp	0,14	1,42	$\frac{0,0960}{0,1740}$	7,40	
СПЗС, Афанасьевский ЛПХ (ПЛХ-3АС)	exp	0,17	1,81	$\frac{0,1230}{0,2210}$	5,81	
СПЗС, Боровской ЛПХ (ПЛХ-3АС)	exp	0,41	1,69	$\frac{0,2900}{0,5300}$	2,44	
ГСУ, Мостовской ЛПХ (ПЛХ-3)	exp	0,17	1,89	$\frac{0,1200}{0,2200}$	5,73	
ПРХ-2С, Оленинский ЛПХ	exp	0,0048	0,30	$\frac{0,0034}{0,0062}$	208,00	

Приложение 11

Время простоев установок типа ЛХЛ-3 из-за отсутствия древесины

Показа- тель	Ухтин- ский	Боров- ской	Красно- уфим- ский	Ханда- гатай- ский	Ново- Козуль- ский	Оленин- ский	Мостов- ской	Афа- нась- евский
Mt_B , мин	29,17	21,28	6,75	10,08	23,25	5,58	6,00	29,33
μ , 1/мин	0,03	0,05	0,15	0,10	0,04	0,18	0,17	0,03

$$K_{\Gamma} = \frac{T_{\Gamma} + \sum t_{OP\Gamma} + \sum t_{TE\Gamma H}}{T_{\Gamma} + T_B + \sum t_{OP\Gamma} + \sum t_{TE\Gamma H}}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
1. ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ	7
1.1. Лесопромышленное предприятие как сложная система	9
1.2. Взаимодействие природных факторов с лесопромышленным производством	13
1.3. Методы исследования сложных систем	16
2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ...	23
2.1. Системы массового обслуживания	26
2.1.1. Общие сведения	26
2.1.2. Методы математического описания систем массового обслуживания	32
2.2. Марковские случайные процессы	34
2.2.1. Классификация состояний. Ориентированный граф состояний. Классификация групп состояний	34
2.2.2. Потоки событий	40
2.2.3. Размеченный граф состояний системы. Система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний....	52
2.3. Некоторые простейшие модели теории массового обслуживания	56
2.3.1. Простейшая СМО с отказами (задача Эрланга)	58
2.3.2. Простейшая одноканальная СМО с неограниченной очередью	59
2.3.3. Простейшая одноканальная СМО с ограничением по длине очереди	60
2.3.4. Простейшая многоканальная СМО с неограниченной очередью	61
2.3.5. Простейшая многоканальная СМО с ограничением по длине очереди	62
2.3.6. Многоканальная СМО с отказами при простейшем потоке заявок и произвольном времени обслуживания	62
2.3.7. Одноканальная СМО с неограниченной очередью при простейшем потоке заявок и произвольном времени обслуживания	62
2.3.8. Одноканальная СМО при произвольном потоке заявок и произвольном времени обслуживания	63
2.3.9. Простейшая многофазовая СМО с очередью	64

2.4.	Классификация систем массового обслуживания для лесопромышленного производства. Характеристики потоков древесины и времени обработки	64
2.5.	Технологические схемы, графы состояний и системы дифференциальных уравнений для определения межоперационных запасов лесоматериалов в лесопромышленном производстве. Производительность механизмов	71
2.5.1.	Определение межоперационного запаса при работе одного механизма	71
2.5.2.	Определение межоперационного запаса при работе нескольких параллельно работающих механизмов	76
2.5.3.	Определение межоперационного запаса при поштучном поступлении лесоматериалов и групповой обработке одним механизмом	78
2.5.4.	Определение межоперационного запаса при групповом поступлении лесоматериалов и поштучной обработке одним механизмом	81
2.5.5.	Определение параметров формул	82
2.5.6.	Итоговые расчётные формулы для некоторых показателей эффективности систем массового обслуживания в лесопромышленном производстве	83
3.	ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА МЕЖОПЕРАЦИОННЫХ ЗАПАСОВ ЛЕСОМАТЕРИАЛОВ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПОТОКАХ ЛЕСОПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА	91
3.1.	Обоснование запаса хлыстов (деревьев) для трелёвки при одном трелёвочном тракторе	93
3.2.	Обоснование запаса хлыстов (деревьев) для трелёвки при нескольких обслуживающих механизмах	94
3.3.	Расчёт запаса деревьев для погрузки при одном погрузчике	96
3.4.	Расчёт запаса деревьев при работе нескольких погрузчиков	97
3.5.	Расчёт запаса деревьев с кронами перед сучкорезной установкой	98
3.6.	Расчёт запаса хлыстов для раскряжёвки	99
3.7.	Расчёт ёмкости питателя для сортиментов перед сортировкой	100
3.8.	Расчёт лесонакопителей для последующей штабелёвки и погрузки	102
3.9.	Расчёт запаса сортиментов на складе	104
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	107
	ПРИЛОЖЕНИЯ	109

Учебное издание

*Чамеев Василий Владимирович
Побединский Владимир Викторович
Солдатов Александр Владиславович*

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ЛЕСОПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА
С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

Серия
Основы проектирования
лесопрмышленных производств.
Системный подход

ISBN 978-5-94984-655-1



Редактор Л.Д. Черных
Оператор компьютерной верстки Т.В. Упорова

Подписано в печать 26.04.2018
Формат 60х84 ¹/₁₆.
Уч.-изд. л. 5,83. Усл. печ. л. 6,97
Тираж 300 экз. (1-й завод 50 экз.)
Заказ №

ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет»
620100, Екатеринбург, Сибирский тракт, 37
Тел.: 8(343)262-96-10. Редакционно-издательский отдел

Типография ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР УПИ»
620062, РФ, Свердловская область, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2
Тел.: 8(343)362-91-16